EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES
OFFICIEEL ORGAAN VAN LIWENAGEL EN VAN WIMECOS

21e JAARGANG 1945/46
(de jaargang 1944/45 is overgeslagen)

Nr. 3, 4

Prijs per jaargang f 6.30*.
Voor intekenaars op het Nieuw Tijdschrift v. Wiskunde f 5.25*.

P. NOORDHOFF N.V. – GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen. Prijs per jaargang *f* 6,30*. Zij die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6,30*) zijn ingetekend, betalen *f* 5,25*.

De leden van Liwenagel (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en van Wimecos (Vereeniging van leeraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmografie aan Hoogere Burgerscholen en Lycea) krijgen Euclides toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van Liwenagel storten de abonnementskosten ten bedrage van *f* 1,85* op de postgirorekening no. 59172 van Dr. H. Ph. Baudet te 's Gravenhage. De leden van Wimecos storten hun contributie voor het verenigingsjaar van 1 September 1945 t/m 31 Augustus 1946 (waarin de abonnementskosten op Euclides begrepen zijn) op de postgirorekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam. De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593 van de firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van Liwenagel of Wimecos. Deze bedragen *f* 5,25* per jaar franco per post.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.



Opname April 1946

Prof. Dr. G. H. A. GROSHEIDE F.Wzn.
geb. 8 Augustus 1909 te Schipluiden

Gepromoveerd 2 Juni 1937 te Amsterdam S.U.
1933—1937 assistent Wiskunde V.U.
1935—1938 leeraar M.O. o.a. te Rotterdam-Zuid.
1938—1945 lector Vrije Universiteit.
Sedert 1945 hoogleeraar Vrije Universiteit.

SAMENWERKING.

De lijst van medewerkers is met enige namen uitgebreid nl. met die van Prof. Dr O. Bottema, en Dr L. N. H. Bunt, beide den lezers welbekend en van de volgende Belgen:

Dr R. Ballieu, Leuven, Dr G. Bosteels, Antwerpen, Dr A. Minne, Luik, Dr V. van de Putte, Ronse en Dr H. Steffens, Mechelen.

Onze collega's uit het Zuiden roepen we een hartelijk welkom toe en we danken hen voor de bereidwilligheid, waarmee ze aan onze roepstem gehoor gaven om met ons samen te werken in het belang van het onderwijs in het algemeen en van dat in de exacte vakken aan de middelbare scholen in het bijzonder.

We spreken de verwachting uit, dat de periode, die hiermee wordt ingeluid, de jeugd in ons beider landen ten goede zal komen en we uiten onze blijdschap over het feit, dat zovelen in Noord en Zuid door hun medewerking de belangen van de leerlingen, die aan onze leiding zijn toevertrouwd, wensen te dienen.

De Redactie.

SAMENWERKING.

In de eerste aflevering van de 33e jaargang van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde vindt men enige regels met dit opschrift; voor Euclides ziet men hetzelfde hierboven. Voor de derde maal gebruiken we hetzelfde woord om een tijdperk in te luiden van samenwerking op wiskundig gebied tussen Zuid en Noord, waarbij zich, naar wij verwachten, Zuid-Afrika gaarne zal aansluiten.

Reeds in 1943 heeft schrijver dezes aan den Heer Soens, den leider van het Belgische **Wis- en Natuurkundig Tijdschrift** de vraag gesteld om na de oorlog dit tijdschrift samen te smelten met **Christiaan Huygens,** dat wegens het vervallen van postverbindingen met het buitenland en de moeilijkheden van het betalen, tijdelijk in ruste was gegaan.

Dit werd met een hartelijk „ja" beantwoord; enige brieven werden gewisseld, zij het met lange onderbrekingen; bij de hervatting van het postverkeer was spoedig alles in kannen en kruiken; uiteraard moesten we wachten met de verschijning tot de papiernood niet meer zo nijpend was.

Verder heeft zich met grote bereidwilligheid ook **Mathematica B** aangesloten, het tijdschrift, dat vrijwel dezelfde stof aan zijn lezers bood als de genoemde tijdschriften.

En zo kunnen we dan de spoedige verschijning aankondigen van een nieuw tijdschrift, dat de naam zal dragen

SIMON STEVIN,

Wis- en Natuurkundig Tijdschrift

als vervolg op het

Wis- en Natuurkundig Tijdschrift	24e Jaargang
Christiaan Huygens	18e Jaargang
Mathematica B	13e Jaargang

Onder redactie van Prof. Dr J. Haantjes, M. Soens en Prof. Dr S. C. van Veen.

De naam van het tijdschrift is een symbool van de samenwerking tussen Zuid en Noord.

Velen hebben hun medewerking toegezegd, waaronder ook Walen; evenals voor het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en voor Euclides is de samenwerking gegrondvest op culturele saamhorigheid en niet tot stand gebracht op linguïstische grondslag.

De uitgevers zijn

De Natuur- en Geneeskundige Vennootschap, zetel Gent en
P. Noordhoff, Groningen.

We voegen hieraan nog toe, dat Mathematica A geheel wordt opgelost in het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en dat het examenwerk, dat Mathematica B bevatte, zal verschijnen onder de naam Mathematica als supplement daarop onder leiding van K. Harlaar, Th. C. L. Kok en Dr M. Scheffer.

Nadere bijzonderheden zullen te zijner tijd worden medegedeeld.

April 1946. P. W.

NASCHRIFT OP VERSCHEIDENHEDEN I:

Een *n*-hoek is door $2n - 3$ gegevens bepaald.
(Euclides *21*, pag. 13—15.)

Naar aanleiding van mijn uiting dat het gebruikelijke bewijs voor deze stelling niet geheel correct zou zijn, doordat in de redenering twee soorten constructieve opgaven (eerste categorie: de ligging der figuur speelt geen rol; tweede categorie: ook de plaats der figuur moet worden bepaald) onvoldoende worden onderscheiden, heb ik van zeer deskundige zijde opmerkingen ontvangen waaruit blijkt, dat mijn bezwaar niet wordt gedeeld.

Dr L. Crijns (Maastricht) en Dr B. P. Haalmeyer (Barneveld) waren nl. zo welwillend mij hun oordeel mede te delen; met hun toestemming worden hier hun meningen weergegeven.

Dr Crijns schrijft onder meer: „Na de constructie van de eerste driehoek Δ_1 kan men met meeneming van de gemeenschappelijke zijde z de tweede driehoek Δ_2 afgescheiden en onafhankelijk van Δ_1 opbouwen; in gevallen, waarbij de twee gegevens van Δ_2 slechts in zeer verwijderd verband met z staan, is men zelfs gedwongen, Δ_2 op een afzonderlijke plaats te construeren. Dat men daarna Δ_2 tot aansluiting aan Δ_1 moet brengen, stempelt de constructie niet tot een van de andere soort. Want dan zou elke constructie van elke driehoek (en van elke figuur) tot die soort gerekend moeten worden: immers na afpassing van de basis of een andere zijde moet de rest in aansluiting daaraan tot stand komen. En voor de constructies in gelijkvormigheid gelden analoge opmerkingen." En de schrijver licht in een later schrijven zijn betoog toe met het naast elkaar stellen van de volgende opgaven 1) construeer vierhoek ABCD als de vier zijden en hoek B gegeven zijn, 2) construeer driehoek ABC als de zijden gegeven zijn. Voor 1) kan men eerst de driehoek ABC op een willekeurige plaats construeren en daarna uit A resp. C met AD resp. CD omcirkelen; voor 2) kan men AB op een willekeurige plaats construeren en daarna uit A en B met AC en BC omcirkelen. De analogie van de beide constructies is volkomen en zij kunnen dus niet tot twee verschillende categorieën behoren.

De opmerkingen van Dr. Haalmeyer gaan voor een deel dezelfde richting als die van Dr. Crijns. Alvorens ze weer te

geven is het mij een behoefte te getuigen, dat Dr. H. wel de laatste is, wie ik een onvoldoende onderscheiding van de beide categoriën van opgaven zou durven verwijten, daar deze in zijn voortreffelijk *Leerboek der Vlakke Meetkunde* wel meer dan in de meeste andere leerboeken geschiedt op het verschil der beide soorten de aandacht heeft gevestigd, overigens met een wijze, door de didactische eisen geboden, gematigdheid.

Dr Haalmeyer schrijft o.a. „Na constructie van den eersten driehoek is een zijde van den tweeden bekend. Gebruikt men deze zijde bij de constructie van den tweeden driehoek, dan is er m.i. niets tegen bij eventueele overbrenging dier zijde, den daaraan vastzittenden eersten driehoek meegevoerd te denken. Verder kan dat ook met den vierhoek enz. geschieden. Mij dunkt, er is geen noodzaak aan een geconstrueerden drie- of veelhoek een assenstelsel of iets dergelijks vast te maken, ten opzichte waarvan deze niet meer van plaats mag veranderen. Bij een lijnstuk pleegt men dat toch ook niet te doen. Natuurlijk kan men ook de driehoeken apart construeren en later samenvoegen." En in een later schrijven: „Beschouwen we eens de constructie van een driehoek, welks zijden gelijk zijn aan drie gegeven lijnstukken. Men begint met ergens een lijnstuk te construeren, gelijk aan een der gegeven segmenten. Daarbij is men vrij in de plaats en hiermee is toch wel, wat er verder ook gedaan wordt, het vraagstuk erkend als behoorende tot de eerste categorie."

Als ik aan deze zeer gewaardeerde opmerkingen een enkel woord mag toevoegen, wil ik eerst vaststellen, dat ik geenszins de constructie van een driehoek tot de eerste en die van een n-hoek ($n > 3$) tot de tweede categorie wil rekenen, zoals men uit de toelichting van Dr Crijns zou kunnen opmaken. De constructie van de n-hoek, in zijn geheel beschouwd, behoort tot de eerste categorie. Zodra men echter de constructie ontleedt en daarbij over de willekeurigheid der ligging eenmaal beschikt heeft, is de rest van de constructie, op zichzelf beschouwd, er één van de tweede categorie en bij telling van het aantal gegevens waarover men bij de uitvoering dezer restconstructie mag beschikken, dient men daarmee rekening te houden. Dr Crijns en Dr Haalmeyer wijzen beide op de constructie van de driehoek met gegeven zijden. Ik ben het met deze beschouwingen volmaakt eens. Deze constructie, in zijn geheel beschouwd, is natuurlijk van de eerste categorie; heeft men echter een der zijden ergens vastgelegd, dan is het vervolg der opgave van de tweede: zij eist immers de constructie van een punt,

dat gegeven afstanden heeft tot twee gegeven punten. Bij het bewijs van de stelling, die ons bezighoudt, is het nu eenmaal gebruik, de figuur in driehoeken te ontleden en het aantal gegevens voor een driehoek bekend te veronderstellen. Ik meen dus, zonder aan de zaak overigens een overdreven waarde te hechten, te moeten volhouden dat het correcter is om te zeggen dat van elke volgende driehoek twee hoekpunten bekend zijn, dan dat een element (n.l. een zijde) gegeven is, zodat het getal 2 verkregen wordt als 6 — 4 en niet als 3 — 1. Omdat mijn opmerking over gelijkvormigheidsconstructies blijkbaar geen grote indruk heeft gemaakt, wil ik tot mogelijke verduidelijking nog het volgende voorbeeld geven.

Hoeveel gegevens heeft men nodig om de vijfhoek ABCDE te construeren? De driehoek ABC is door drie gegevens bepaald, de restconstructie is van de tweede categorie. Driehoek ADE eist dus 6 gegevens; omdat echter het hoekpunt A in ligging gegeven is, vermindert dit aantal tot $6 - 2 = 4$. Voor het geheel zijn dus 7 gegevens nodig.

NASCHRIFT OP VERSCHEIDENHEDEN II:

Krachtlijn en baankromme.
(Euclides *21*, pg. 15—17)

Van Dr L. Crijns (Maastricht), R. S. Ketel (Almelo) en Dr Ir A. J. Staring (Appingedam), die ik dank moge zeggen voor hun belangstelling, ontving ik bewijzen voor de stelling van Kasner. Zij lopen genoeg uiteen, om ze hier alle te laten volgen. Wij voegen het door Kasner gegeven bewijs er aan toe. De stelling luidt: laat men in een punt O van een krachtveld een stoffelijk punt zonder beginsnelheid los, dan is de kromtestraal van de baankromme in P *drie* maal zo groot als de kromtestraal van de krachtlijn in P.

1) (Crijns).

We onderstellen, dat de raaklijn in 't beginpunt O samenvalt met de x-as. In 'n voldoend kleine omgeving van O kunnen de baankromme en de krachtlijn voorgesteld worden door

$$y = \frac{1}{2R_2}x^2 \text{ en } \bar{y} = \frac{1}{2R_1}\bar{x}^2.$$

In 'n punt x van de baankromme in die omgeving wordt de tangens van de hoek tussen de baan en de krachtlijn bepaald door

$$\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\left(x - \frac{1}{R_1R_2}x^3 + \ldots\ldots\right).$$

Verder vindt men

$$\dot{s}^2 = \left(1 + \frac{1}{R_2^2}x^2\right)\dot{x}^2$$

en hieruit

$$\ddot{s} = \left(1 + \frac{1}{2R_2^2}x^2 + \ldots\right)\ddot{x} + \frac{1}{R_2^2}\left(x - \frac{1}{2R_2^2}x^3 + \ldots\right)\dot{x}^2.$$

Dus komt er

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{R_2^2}x^2\right)\dot{x}^2}{R_2} : \left\{(1 + \ldots)\ddot{x} + \frac{1}{R_2^2}(1 - \ldots)x\dot{x}^2\right\} = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)(x - \ldots)$$

dus met voldoende benadering

$$\dot{x}^2 = \frac{R_2 - R_1}{R_1}x\ddot{x}.$$

De (exacte) oplossing hiervan is

$$x = A(t + B)^{\frac{R_2 - R_1}{R_2 - 2R_1}}$$

Uit x_0 (of $\dot{x}_0$) $= 0$ volgt $B = 0$ en uit $\ddot{x}_0 \neq 0$, eindig,

$$\frac{R_2 - R_1}{R_2 - 2R_1} = 2, \text{ dus } R_2 = 3R_1.$$

2) (Crijns).
Uit de energiewet volgt

$$\dot{x}^2 = 2x\ddot{x}.$$

Van de andere kant volgt door ontbinding van de kracht in de richting van de raaklijn en naar 't krommingsmiddelpunt M_2 van de baan in O (als A 't punt op de baan is en M_1 't kr.middelp. van de krachtlijn in O)

$$\frac{\dot{x}^2}{R_2} : \ddot{x} = \angle M_2AM_1 = \angle OM_1A - \angle OM_2A = \frac{x}{R_1} - \frac{x}{R_2}.$$

Door identificering van de 2 vergelijkingen vindt men

$$R_2\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = 2, \text{ dus } R_2 = 3R_1.$$

3) (Ketel). (fig. 1).
In het punt O zij $K \neq 0$.
De kromming van de krachtlijn is R.
Op een afstand OA $= x$ van O, is de normale component K_y benaderd voor te stellen door:

$K_y = K\varphi$, terwijl $x = R\varphi$.

Hieruit volgt:

$$(1) \quad K_y = \frac{K}{R}x.$$

Voor de baan geldt bij een aanvangssnelheid nul, in d buurt van O:

$$(2) \quad x = \tfrac{1}{2}\frac{K}{m}t^2.$$

$$(3) \quad y = \int_0^t dt \int_0^t dt \frac{K_y}{m}.$$

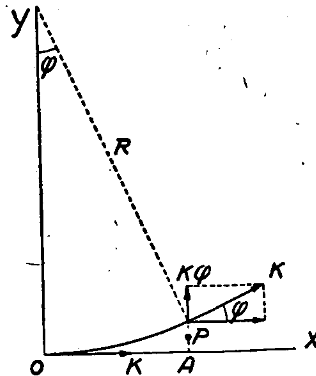


Fig. 1.

Substitueren we (1) en (2) in (3), dan vinden we

$$(4) \quad y = \frac{1}{24m^2}\frac{K^2}{R}t^4.$$

Dit geeft met behulp van (2)

$$y = {}^{1}/_{6}\,\frac{1}{R}\,x^2.$$

Voor de baan vinden we dus

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{3R}.$$

Waaruit volgt dat de baankromme drie maal zo zwak gekromd is als de krachtlijn.

4) (S t a r i n g). (fig. 2).

In het volgende bewijs stellen de letters

a, b, c, d, e, f en g

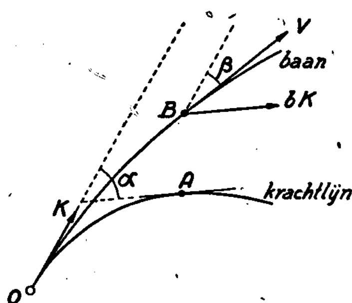


Fig. 2.

veranderlijke coëfficiënten voor, die alle tot limiet 1 hebben, als men de lengte van het baanstukje, waarover de berekening gaat, tot nul laat naderen.

In de figuur is de boog OB een stukje van de baankromme, lengte Δs. De boog OA is een stukje van de krachtlijn, lengte $a.\Delta s$, rakend in O aan de baan; het punt A is zó gekozen, dat daar de veldsterkte evenwijdig is aan die in B.

In O, het beginpunt der beweging, ondervindt het stoffelijk punt met massa m de kracht K; in B de kracht b.K, het heeft daar de snelheid v. De gemiddelde tangentiële kracht over het baanstuk OB is c.K, zodanig, dat volgens de arbeidsvergelijking:

$$c\,.\,K\,.\,\Delta s = {}^{1}/_{2}\,m\,.\,v^2. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

α is de hoek tussen de raaklijnen aan de krachtlijn in O en A. De kromming van de krachtlijn in O is k_k; de gemiddelde kromming over OA is $d\,.\,k_k$, zodanig dat

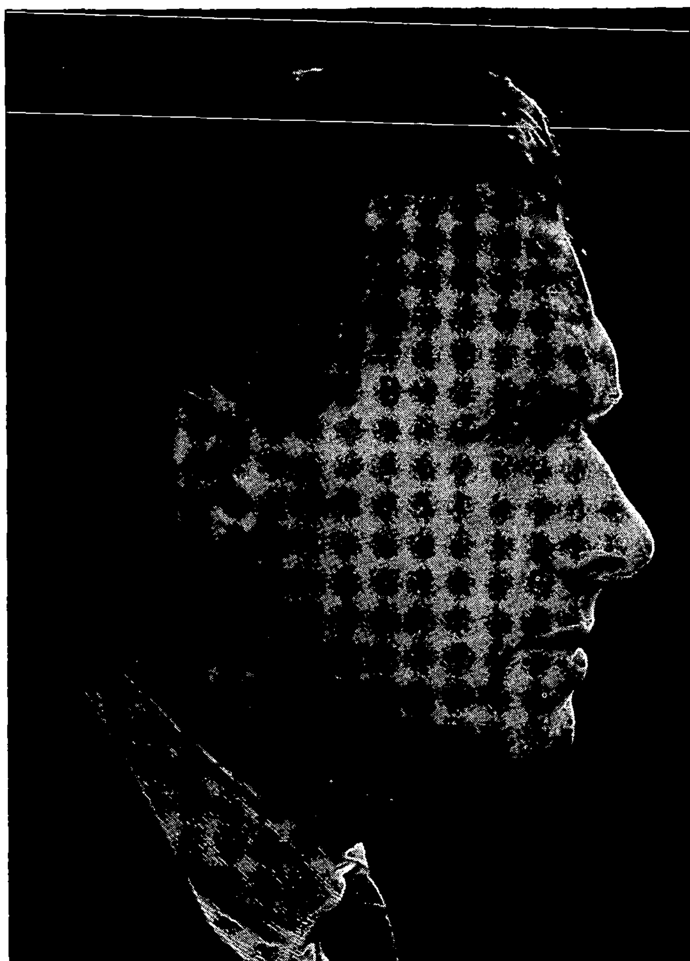
$$\alpha = a\,.\,\Delta s\,.\,d\,.\,k_k.$$

β is de hoek tussen de raaklijnen aan de baan in O en B. De kromming van de baan in O is k_b; in B $e\,.\,k_b$; de gemiddelde kromming over OB is $f\,.\,k_b$, zodanig dat

$$\beta = \Delta s\,.\,f\,.\,k_b.$$

De hoek tussen de krachtrichting en de snelheidsrichting in B is $\alpha - \beta$:

$$\alpha - \beta = \Delta s\,.\,(a\,.\,d\,.\,k_k - f\,.\,k_b).$$



Opname April 1946

Prof. Dr. J. HAANTJES

geb. 18 Sept. 1909 te Itens, studeerde en promoveerde in 1933 aan de Universiteit te Leiden, vanaf 1934 privaat-docent aan dezelfde Universiteit. Lector aan de Vrije Universiteit te Amsterdam van 1938—1945. Sinds 1945 hoogleraar aan deze Universiteit.

De normale component van de kracht in B is $b.K.\sin(\alpha-\beta)$, of $b.K.g.(\alpha-\beta)$, dus $b.g.K.\Delta s(a.d.k_k - f.k_b)$.

Bijgevolg is:

$$b.g.K.\Delta s.(a.d.k_k - f.k_b) = m.v^2.e.k_b. \quad . \quad . \quad (2)$$

Deling van (1) op (2) geeft:

$$\frac{b.g}{c}.(a.d.k_k - f.k_b) = 2e.k_b.$$

Overgaande tot de limiet voor B→O vindt men voor het punt O de betrekking:

$$k_k - k_b = 2k_b;\ \ k_b = {}^1/_3 k_k.$$

5) (Kasner).

Zijn $P(xy)$ en $Q(xy)$ de x- en de y-component van de veldsterkte, dan geldt voor een stoffelijk punt met massa 1:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = P,\ \frac{d^2y}{dt^2} = Q.$$

Is $y = f(x)$ de vergelijking van een *baankromme*, dan is

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}.\frac{dx}{dt}$$

en

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dy}{dx}.\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dx^2}.\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

dus

$$Q = P.\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2}.\left(\frac{dx}{dt}\right)^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Differentieert men deze betrekking naar t en elimineert men $\frac{dx}{dt}$ met behulp van (1), dan ontstaat de volgende differentiaalvergelijking van de derde orde voor de baankrommen.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}.\frac{dy}{dx} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}.\frac{dy}{dx}\right).\frac{dy}{dx} + 3P\frac{d^2y}{dx^2} +$$

$$+ \frac{Q - P\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.\frac{d^3y}{dx^3}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Is nu O het beginpunt en de X-as de raaklijn aan de krachtlijn en de baankromme, dan geldt voor dit punt:

$$Q = 0,\ \frac{dy}{dx} = 0,\ \text{zodat}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x}}{3P}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

De *krachtlijnen* van het veld voldoen aan de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Q}{P}$$

waaruit volgt

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{P\left(\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\right)-Q\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\right)}{P^2}$$

Als $Q=0$, $\frac{dy}{dx}=0$ heeft men dus

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}}{P} \quad \dots\dots\dots \quad (4)$$

Uit (3) en (4) volgt het gestelde.

Dr. Doornenbal was zo vriendelijk mij een exemplaar toe te zenden van de 9e druk van Natuurkunde - A, door Dr P. Doornenbal en Dr F. W. Nijhoff (Zwolle, 1943), waarin de door mij geciteerde passage over de beweging langs een krachtlijn niet meer voorkomt en vervangen is door een betoog, waarbij uitdrukkelijk wordt verondersteld, dat de betreffende beweging *zeer langzaam* moet plaats vinden (pg. 231). Naar Dr Doornenbal mededeelt, zal een herinnering aan de vroegere redactie (pg. 233) in de volgende druk niet meer voorkomen.

VERSCHEIDENHEDEN

door

Prof. Dr. O. BOTTEMA.

III. CONSTRUEER EEN DRIEHOEK ALS GEGEVEN ZIJN...

Een groot aantal opgaven uit onze schoolboeken voor planimetrie begint met deze woorden. Er volgen dan drietallen gegevens van uiteenlopende aard: zijden, hoeken, hoogtelijnen, zwaartelijnen, binnen- en buitenbissectrices, stralen van om-, in- en aangeschreven cirkels, sommen en verschillen van zijden en nog vele andere. Misschien zijn dergelijke vraagstukken wel eens wat gezocht, maar dat neemt niet weg, dat het maken van een behoorlijk aantal dezer constructie-opgaven een goed hulpmiddel is om met de leerlingen dat te bebereiken, wat men met meetkundeonderwijs beoogt.

De opgaven sluiten zich in het algemeen aan bij het hoofdstuk der theorie, dat behandeld is. Een zeker aantal kan gemaakt worden als de elementaire constructies behandeld zijn; andere moeten wachten tot de theorie van omtrekshoeken en bogen aan de orde is geweest of de eigenschappen der merkwaardige uitdrukkingen s en $s - a$. Verder zit er weinig systeem in en dat is maar goed ook, want te veel systematiek bevordert de neiging tot ongewenst memoriseren, vermindert de bekoring en de „spanning" en belemmert de ontwikkeling van het inventief vermogen. Toch is het wel aantrekkelijk een enkele maal een *stelsel* opgaven aan de orde te stellen, zoals dat der raakproblemen van Apollonius. (In de gedachtengang der leerlingen is er nog geen plaats voor de opvatting dat er maar één probleem is en de negen andere bijzondere gevallen van dat ene). Als een stelsel van andere aard kan men datgene nemen, waartoe alle driehoeksconstructies behoren, waarbij in de gegevens alleen sprake is van *zijden, hoogtelijnen* en *zwaartelijnen*. Het bepalen van het aantal dezer problemen is al een probleem op zichzelf. Men vindt in de gebruikelijke notatie de volgende *twintig* opgaven:

1) abc, 2) abh_c, 3) abh_a, 4) abm_c, 5) abm_a, 6) ah_ah_b, 7) ah_bh_c, 8) ah_am_a, 9) ah_am_c, 10) ah_bm_a, 11) ah_bm_b, 12) ah_bm_c, 13) am_am_b, 14) am_bm_c, 15) $h_ah_bh_c$, 16) $h_ah_bm_a$, 17) $h_ah_bm_c$, 18) $h_am_am_b$, 19) $h_am_bm_c$, 20) $m_am_bm_c$.

Het aardige is nu dat niet alleen al deze opgaven uitvoerbaar zijn, maar dat zij ook geheel vallen binnen het vermogen der leer-

lingen van onze middelbare scholen. Het kan niet de bedoeling zijn de constructies hier te behandelen, wij volstaan met een enkele opmerking. Enige zijn zeer eenvoudig, een paar van de moeilijkere algemeen bekend; de discussie is dikwijls de moeite waard.

De nos. 1, 2, 3, 5, 6, 8 zijn zeer eenvoudig, bij 4 moet natuurlijk de zwaartelijn verdubbeld worden en ditzelfde idee kan men bij 9 gebruiken, die al wat moeilijker is; 7, 10 en 11 gaan het best met een hulpdriehoek; 12 is een aardige opgave, waarbij eerst C geconstrueerd kan worden en dan driehoek BCC′ als C′ het eind der verdubbelde zwaartelijn is; men stuit op het twijfelachtige geval en de discussie is interessant: van h, $2m$ en a moet h de kleinste zijn, voor $2m > a$ en voor $2m < a$ krijgt men twee oplossingen, maar de gevallen zijn toch ongelijk. De nos. 13, 14 en 20 gelukken met behulp van de verhouding waarin zwaartelijnen elkaar verdelen, 15 is welbekend, 16 en 17 zijn m.i. de moeilijkste van het stel en de gemiddelde leerling zal ze misschien zonder hulp niet vinden. Nos. 18 en 19 brengt men terug tot 2. Zoals men ziet is er meer afwisseling dan verwacht kon worden en als een herhalingstaak is het stel misschien niet eens ongeschikt.

Het idee is voor uitbreiding vatbaar en zolang men zich voor overdrijving hoedt, kan ik met deze poging tot systematiek vrede hebben. Laat men ook andere gegevens toe, dan loopt het aantal mogelijkheden sterk op. Geeft men behalve zijden, hoogtelijnen en zwaartelijnen ook nog de binnenbissectrices, dan tel ik in 't geheel 48 opgaven. En vele daarvan zijn met passer en liniaal niet uitvoerbaar. Meetkundige criteria voor de construeerbaarheid zijn mij niet bekend, het schijnt wel dat men voor elk geval het algebraïsch aequivalent van de opgave moet onderzoeken. Dat hier nog belangwekkende actuele problemen liggen, blijkt uit recente publicaties van H. Wolff en van der Waerden over de constructie van een driehoek uit zijn bissectrices[1]).

In het geval dat de onmogelijkheid van de constructie met passer en liniaal vaststaat, kan men de vraag opwerpen of met hogere hulpmiddelen (b.v. met een pasliniaal of met een rechte hoek) het doel bereikt kan worden. Al liggen al deze zaken buiten het gebied van het middelbaar onderwijs, zij kunnen de belangstelling voor de elementaire meetkunde levend houden.

---

[1]) H. Wolff, Über die Bestimmung eines ebenen Dreiecks aus seinen Winkelhalbierenden, *Journ. reine u. angew. Mathem.* 177 (1937), 134—151; van der Waerden, Über die Bestimmung eines Dreiecks aus seinen Winkelhalbierenden, id. 179 (1938), 65—68.

IV. INTERPOLATIE.

Het woord interpolatie komt of kwam in de schoolwiskunde in twee, overigens verwante betekenissen voor. Men bedoelt er enerzijds een bewerking mede, waarbij tussen twee getallen — meestal opvolgende termen van een reeks — een gegeven aantal nieuwe getallen geplaatst wordt, zodat deze samen met de beide gegevene de termen van een reken- of meetkundige reeks vormen. Ten tweede wordt het woord gebruikt in de volgende situatie: van een functie $f(x)$ is gegeven $f(a) = p$ en $f(b) = q$, voor tussen a en b gelegen waarden van x is $f(x)$ wel gedefinieerd maar niet bekend of moeilijk uit te rekenen. Kan men een redelijk vermoeden uitspreken voor $f(x)$ in de veronderstelling, dat $f(x)$ niet al te veel schommelt en a en b niet al te ver van elkaar liggen? Men komt dikwijls tot een bruikbaar resultaat door de grafiek van $f(x)$ tussen a en b te vervangen door de koorde en duidt dit procédé aan met het woord lineaire interpolatie.

Voor zover mij bekend is interpolatie in de eerste zin een wijze van doen, welker betekenis tot de schoolwiskunde beperkt is en die weinig ander nut heeft dan het geven van oefenstof bij vraagstukken over reeksen. Met name: interpolatie zodanig, dat een meetkundige reeks ontstaat maakt een gekunstelde indruk. Interpolatie volgens de termen van een rekenkundige reeks is natuurlijk nauw verwant met de genoemde lineaire interpolatie, maar is het in een wat enger begrip, omdat bij deze laatste een continue aangroeiing van x tussen a en b niet is uitgesloten.

Het behoeft hier nauwelijks vermeld te worden, dat interpolatie in de tweede zin des woords een voor de zuivere en toegepaste wiskunde buitengewoon belangrijk en vruchtbaar begrip is. Lineaire interpolatie is daarbij nog maar een bijzonder geval van een bewerking, waarbij door een aantal gegeven punten van het (x, y)-vlak een kromme gelegd wordt, welke de grafiek is van $y = P_n(x)$, waar $P_n(x)$ een polynoom van de n^{de} graad voorstelt. Algemeen bekend is de interpolatieformule van Lagrange en het voortreffelijke en uitvoerige werk *Interpolation* van Steffensen is een levend getuigenis van de grote betekenis, welke de moderne mathesis aan dit begrip hecht.

De lineaire interpolatie kan in de lagere klassen onzer middelbare scholen goed geïllustreerd worden bij de bespreking van de grafieken welke de loop der treinen op een baanvak in beeld brengen en waarbij b.v. ten behoeve van kruisingen geïnterpoleerd wordt tussen twee gegevens uit het spoorboekje.

Het belangrijkste geval, waar de interpolatie practisch te pas komt is het werken met een tafel; voor onze leerlingen zijn dat dus de logarithmentafels en de tafels der goniometrische functies.

Het blijkt mij, dat in verschillende scholen het begrip interpolatie in de tweede, dus voor de wiskunde in het algemeen zeer belangrijke zin onbekend is geworden en ik meen dat te moeten betreuren. Hier wordt een goede gelegenheid verzuimd om de leerling in aanraking te brengen met een algemeen wiskundig begrip, dat geheel binnen zijn bevattingsvermogen ligt. Wanneer men hem voorstelt log n te bepalen door het gemiddelde te nemen van $\log(n - 1)$ en $\log(n + 1)$, dan is het een aardige en eenvoudige opgave, om hem te doen inzien, dat de benaderingswaarde te klein is, waarna men dit inzicht met een verwijzing naar de grafiek van log x, die naar boven convex is, bevestigen kan. Het is mij welbekend, dat in vroeger jaren aan de bewerkingen met logarithmentafels overdreven waarde werd gehecht en dat er misschien meer tijd aan werd gegeven dan verantwoord kon worden, terwijl wat nog erger is, elk begrip over de betrouwbaarheid der uitkomsten ontbrak, ja zelfs nauwelijks beseft werd dat hier een probleem aanwezig was. Ik weet, dat de betekenis van het rechtstreekse numerieke rekenen en ook van het rekenen met behulp van logarithmentafels in de latere jaren sterk is verminderd door de snelle ontwikkeling der rekenmachine. Aan de andere kant kan echter niet worden ontkend, dat het met de technische- en in het bijzonder ook met de rekenvaardigheid van onze leerlingen dikwijls zeer droevig gesteld is en wij moeten het feit onder de ogen zien, dat deze omstandigheid hun bruikbaarheid voor verschillende functies nadelig beïnvloedt en ook bij voortgezette studie schade kan doen. De oorzaak ligt waarschijnlijk bij de gewijzigde inzichten inzake het wiskunde-onderwijs, waarvan men overigens de strekking niet anders dan toejuichen kan. Een der exponenten van de nieuwe gedachte is de invoering van de logarithmentafel in vier decimalen, welke in Duitsland reeds jaren lang was bepleit en waarvoor in dat land met name Schülke als kampioen is opgetreden. Bij ons is onder meer door Verrijp propaganda voor dit denkbeeld gemaakt. In het „Ontwerp van een leerplan voor het onderwijs in wiskunde, mechanica en kosmographie. op de H.B.scholen met vijfjarigen cursus" (1926) van de Commissie-Beth, dat wij in zekere zin als de *considerans* op het tegenwoordige programma mogen beschouwen, wordt het betreffende voorstel alleen toegelicht door de volgende volzin: „De invoering van de logarithmentafels met vier decimalen zal zeer zeker een groote vereenvoudiging in het cijferwerk beteekenen en dus veel tijd vrij

maken, die beter besteed kan worden". Het is hier niet recht duidelijk, of de vereenvoudiging gezien wordt in het feit, dat men een decimaal minder heeft te schrijven, dan wel in de omstandigheid, dat het interpoleren, dus het gebruik van de tafeltjes der evenredige delen, vervalt. Dit laatste is immers op zich zelf niet inhaerent aan de invoering van eén tafel in vier decimalen, maar is alleen een gevolg, en wel m.i. een minder gewenst gevolg, van de wijze waarop men het begrip „logarithmentafel in vier decimalen" heeft opgevat. Voor zover ik nl. kan nagaan gebruikt men thans op onze scholen algemeen tafels, welke uit die in vijf decimalen zijn verkregen, door de mantisses op vier decimalen af te ronden en is men zich weinig bewust, dat daardoor het karakter van de tafel is gewijzigd. Men heeft nl. de getallenrij wel smaller, maar niet korter gemaakt, de *numeri* lopen nog evenals vroeger tot 10000. Het geheel maakt daardoor op mij de indruk van een bepaald slecht geproportioneerd lichaam. Ik weet niet of er aesthetische beginselen bestaan voor het inrichten van tafels en misschien speelt een onverdedigbaar conservatisme, berustend op jarenlange omgang met de vijfdecimalige tafel en zijn innerlijke structuur mij parten, maar ik vind de nieuwe tafel uitgesproken lelijk, omdat er discongruentie bestaat tussen zijn inwendige afmetingen. Doordat de numeri te dicht op elkaar liggen, zit er geen vaart in de mantisses, die in een ergerlijk tempo voortsukkelen. Al heel spoedig is het al een uitzondering als de aangroeiing meer bedraagt dan een enkele eenheid van de laatste decimaal, van log 4402 af staat de hele zaak herhaaldelijk stil en boven log 6000, met nog meer dan een derde van het stuk vóór ons, volgt op elke aangroeiing minstens een maat rust. Zijn dit tafels voor onze dynamische tijd? Is men van oordeel, dat de vijfdecimalige tafel een onnodige en dus ongewenste nauwkeurigheid geeft en daarom bij practische opgaven in de hand van onoplettenden antwoorden oplevert, die onbetrouwbaar of zelfs ridicuul zijn, laat men dan de afmetingen van het gehele apparaat verkleinen en de numerus laten lopen van 1 tot 1000. Men krijgt dan een tafel van twee pagina's in de trant zoals ook door V e r r i j p was bedoeld en zoals door hem er, meen ik, één is uitgegeven. Zo'n tafel is goedkoop en bevredigt de goede smaak. En de jeugd leert weer interpoleren.



Dr. H. A. C. DENIER VAN DER GON, leraar in de wis- en natuurkunde aan de Dalton H.B.S. te 's Gravenhage, behoort tot die groep van goede vaderlanders, die kort voor de eindelijke bevrijding nog het leven moesten laten. In Maart '45 is hij door de Duitsers in de Waalsdorper duinen doodgeschoten, juister en eerlijker is het te schrijven vermoord.

In Utrecht geboren op de 22e October 1894, opgegroeid in de schaduw van de muren van het Natuurkundig Laboratorium der Rijksuniversiteit, wist hij zich via de H.B.S. en het Staatsexamen de officiële weg te banen tot dit gewijde terrein. Echter het zou betrekkelijk lang duren voor hij dit eerste doel bereikt had. Immers de eerste van de

twee rampen, die Europa tijdens het leven van ons, ouderen, teisterden bracht een langdurig oponthoud mee. Voor het begin van deze oorlog was hij ter vervulling van zijn dienstplicht onder de wapenen geroepen en kwam hij in de opleiding voor reserveofficier bij de artillerie, en eerst in 1919 kon hij zijn academische studie aanvatten. Wie hem in zijn studietijd van nabij kon gadeslaan, zag reeds al datgene aan hem, wat later duidelijker naar buiten zou treden: zijn liefde voor de experimentele natuurkunde, samen met zijn grote vaardigheid in het omgaan met de instrumenten, maar ook zijn belangstelling voor veel wat buiten het gebied van zijn studie viel, voor wijsgerige en godsdienstige vraagstukken, alsmede zijn neiging om niets half te doen. Wat hij aanpakte moest áfgemaakt worden en in dit afmaken gaf hij zich geheel: als hij onder de wapenen was, elk jaar een korte tijd, was hij officier, in het laboratorium was hij volledig physicus en daarbuiten voor zover zijn studie hem tijd liet, was hij de mens, die door de vraagstukken des levens geboeid werd en die ook in deze richting voortging met inzet van zijn gehele persoonlijkheid. In 1924 deed hij zijn doctoraal examen en werd hij leraar aan de R.H.B.S. te Middelharnis. Het werk, dat hem hier wachtte, legde al spoedig geheel beslag op hem. Geboren experimentator, doortrokken van de geest der proefondervindelijke wetenschappen, stond niets verder van hem af dan natuurkunde onderwijs, dat zich beperken zou tot het goochelen met formules op het zwarte bord. Alle natuurkundig onderzoek begint met waarneming, het onderwijs in de natuurkunde dient daar dus ook mee te beginnen. De leerling zo gauw mogelijk deze kunst bijbrengen, natuurlijk te gelijk met het verwerken van het waargenomene in bepaalde conclusies, ziedaar het doel van zijn onderwijs. Zo heeft Denier van der Gon van de aanvang af gezocht naar de middelen om de leerlingen op de meest doelmatige wijze met het experiment in aanraking te brengen, die meest doelmatige aanraking lag, zo was zijn overtuiging, in het zelf experimenteren. Als hij in 1928 aan de Dalton H.B.S. te 's Gravenhage zijn arbeid als leraar voortzet is zijn streven er geheel op gericht dit deel van zijn

taak tot de graad van volmaaktheid op te voeren, die het in latere jaren kenmerkte. In de tijd, die toen volgde, hield de vraag op welke wijze hij door zijn onderwijs in de natuurkunde en in de wiskunde de geestelijke vorming van zijn leerlingen kon bevorderen, hem meer en meer bezig. Zijn zoekende geest wierp zich met de hem kenmerkende grondigheid op de studie der psychologie en der wetenschappelijke paedagogiek. Didactische problemen trachtte hij langs deze wege tot een oplossing te brengen. Dat niet alleen de practijk van het lesgeven, maar ook het doordenken en theoretisch verwerken der vraagstukken die zich daarbij voordoen hem verder zou brengen, daarvan was hij overtuigd. Het resultaat van zijn practische ervaring en van die theoretische overwegingen deelde hij mee aan de studenten der Leidse hogeschool sinds 1936, het jaar, waarin hij als privaat docent in de didactiek der natuurkunde werd toegelaten.

De mobilisatie bracht hem opnieuw terug in het leger. Als kapitein, later majoor, der artillerie nam hij deel aan de voorbereiding tot de verdediging van zijn land en streed hij mee in de Meidagen. Dan komt de bezettingstijd, die hem terugvoerde naar school en studeerkamer, later ook naar de werkplaats der ondergrondsen. Heeft men dit van hem geweten of was het een ongelukkig toeval, dat hij in het voorjaar van 1945 gevangen genomen werd? Hiervan weten wij niets met zekerheid. Wat wij helaas maar al te zeker weten is, dat hij nimmer meer terugkeren zal in ons midden, dat degenen, die met hem samenwerkten, hem zullen moeten missen voor goed, dat hij een lege plaats laat in de school en daarbuiten in kleinere en grotere kringen van mensen, die in een of ander vorm werkten voor het welzijn van de gemeenschap.

In onze herinnering blijft hij als een trouw vriend, een hard werkend, begaafd mens met een warme belangstelling voor de school, maar ook voor veel wat daar buiten stond, en onze deernis blijft uit gaan naar het gezin, waaruit hij werd weggerukt en waar men dieper dan waar ook zijn blijvende afwezigheid gevoelt.

D. H. PRINS.

PARTITIES

door

H. D. KLOOSTERMAN [1]).

Onder eén *partitie* van een natuurlijk getal n verstaat men een splitsing van dit getal in een som van natuurlijke getallen. Zoo is b.v.

$$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1.$$

Telt men ook de „splitsing" $4 = 4$ als een uit één term bestaande som mede, dan heeft men daarmede vijf partities van het getal 4 verkregen en ook is het duidelijk, dat er geen andere partities van 4 mogelijk zijn (indien men tenminste, wat we zullen doen, niet op de volgorde der termen let). Het aantal partities van het natuurlijke getal n worde door $p(n)$ voorgesteld. We hebben dus gevonden, dat $p(4) = 5$ is. Even gemakkelijk ziet men verder b.v. in, dat $p(1) = 1$, $p(2) = 2$, $p(3) = 3$.

Het probleem, waarmede we ons nu zullen bezig houden, is de vraag naar de berekening van $p(n)$ bij gegeven n. Daarbij vraagt men zich misschien eerst af, in hoeverre dit een probleem is. Want evenals we zooeven de waarden van $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$ en $p(4)$ hebben gevonden, zou men toch ook voor andere waarden van n de waarde van $p(n)$ kunnen vinden, door „eenvoudig" alle partities van n uit te schrijven. Inderdaad kost het ook nog weinig moeite om voor b.v. $n = 5, 6, 7$ en 8 alle partities op te schrijven. Men vindt dan gemakkelijk, dat $p(5) = 7$, $p(6) = 11$, $p(7) = 15$, $p(8) = 22$. Wil men echter verder op deze wijze doorgaan, dan wordt het geduld van de meest volhardende rekenaar al zeer spoedig op een buitengewoon zware proef gesteld. Ik behoef U. b.v. slechts mede te deelen, dat reeds

$p(22) = 1002$, $p(33) = 10143$, $p(46) = 105558$, $p(61) = 1121505$

is, om U te doen inzien, dat reeds bij betrekkelijk kleine waarden van n het uitschrijven van alle partities van n geen kleinigheid is. Het gestelde probleem kunnen we nu dus in de eerste plaats in dien zin eenigszins preciseeren, dat we vragen om $p(n)$ te berekenen, zonder genoodzaakt te zijn om alle partities van n uit te schrijven. In de tweede plaats (en dit is theoretisch veel belangrijker) zullen we ons echter ook de vraag voorleggen om een formule te vinden, die het gedrag van $p(n)$ voor groote waarden van n bepaalt (een z.g. *asymptotische* formule). Deze tweede vraag heeft zelfs, zooals

---

[1]) Voordracht, gehouden te Amsterdam op 28 December 1945 voor de Vereeniging van Leeraren in de Wiskunde, de Mechanica en de Cosmographie aan Hoogere Burgerscholen en Lycea (Wimecos).

we nog zullen zien, geleid tot een formule, die ons in staat stelt om $p(n)$ voor iedere waarde van n exact te berekenen.

De eerste vraag is reeds door Euler op bevredigende wijze opgelost. In zijn beroemde „Introductio in Analysin Infinitorum" (1748) merkte hij op, dat men de getallen $p(n)$ krijgt als coëfficienten in de ontwikkeling van

$$(1) \quad f(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n)x^n$$

in een machtreeks. Inderdaad is $p(n)$ ook gelijk aan het aantal oplossingen in niet-negatieve geheele getallen $m_1, m_2, m_3 \ldots$ van

$$n = m_1 + 2m_2 + 3m_3 + \ldots,$$

terwijl anderzijds

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots} = \sum_{m_1=0}^{\infty} x^{m_1} \cdot \sum_{m_2=0}^{\infty} x^{2m_2} \cdot \sum_{m_3=0}^{\infty} x^{3m_3} \ldots\ldots$$

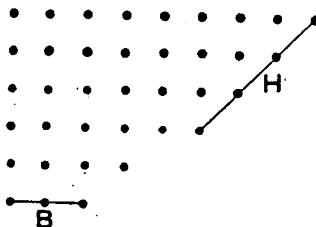
Later vond Euler (eerst langs empirischen weg, doch later gaf hij een exact bewijs) [1]) de voor ons probleem zoo belangrijke identiteit

$$(2) \quad (1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k x^{\frac{1}{2}(3k^2-k)}$$

$$= 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + \ldots$$

De hierin optredende exponenten $\frac{1}{2}(3k^2 - k)$ zijn de z.g. gegeneraliseerde pentagonaalgetallen of vijfhoekige getallen [2]). We zullen van de formule (2) hier het buitengewoon fraaie bewijs geven, dat afkomstig is van F. Franklin [3]) en dat ons ook weer direct met partities in aanraking zal brengen.

Daartoe maken we voor iedere partitie een soort graphische voorstelling. Beschouwen we b.v. de partitie $37 = 9 + 8 + 7 + 6 + 4 + 3$ van het getal 37. De deelen, waarin 37 is gesplitst (en die hier alle ongelijk zijn) zijn naar afnemende grootte gerangschikt. Deze partitie stellen we als volgt door 37 punten voor:



1) Opera omnia, deel 2, blz. 241—253 en 390—398.

2) De getallen $\frac{1}{2}(3k^2 - k)$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$) dus 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, ... zijn de pentagonaalgetallen. Voegt men hieraan de getallen $\frac{1}{2}(3k^2 + k)$ ($k = 0, 1, 2, 3 \ldots$) toe, dus de getallen 0, 2, 7, 15, 26, 40, 57, 77, 100, ... dan krijgt men de gegeneraliseerde pentagonaalgetallen.

3) Comptes Rendus 92 (1881), blz. 448—450.

De zes rijen van punten in deze figuur correspondeeren met de zes deelen, waarin 37 door de partitie is gesplitst. Iedere rij bevat evenveel punten als het met deze rij correspondeerende deel van 37 bedraagt. Daarbij staat het eerste punt van iedere verdere rij verticaal onder het eerste punt van de eerste rij. Indien we dan nog alleen partities *in ongelijke deelen* beschouwen en de deelen naar afnemende grootte rangschikken, dan kunnen we nu zeggen, dat met iedere dergelijke partitie een grafische voorstelling correspondeert, waarin iedere volgende rij van punten *minder* punten bevat dan de voorafgaande rij. De onderste rij van punten in deze graphische voorstelling noemen we de *basis* B van de partitie. Het aantal punten in deze basis (dat één of meer kan zijn) stellen we eveneens door B voor. In het bovenstaande voorbeeld is dus B = 3. Verder trekken we een rechte lijn uit het laatste punt van de eerste rij onder een hoek van 45° [1]) schuins links naar beneden en wel trekken we deze lijn zoo ver mogelijk door, echter niet verder als we daarbij geen punten van de graphische voorstelling meer kunnen ontmoeten. Deze lijn noemen we de *helling* H van de partitie en het aantal punten van de graphische voorstelling, dat op deze helling ligt (en dat één of meer bedraagt) stellen we eveneens door H voor. In het bovenstaande voorbeeld is dus H = 4.

Van ieder natuurlijk getal n beschouwen we nu alleen de partities *in ongelijke deelen*, waarbij we verder nog uitzonderen die partities, die tot één der beide volgende categorieën behooren:

1°. B = H en tevens hebben de basis B en de helling H een gemeenschappelijk punt. Als $B = H = k$ is, dan volgt gemakkelijk, dat een partitie van deze soort alleen maar voorkomt als

$$n = k + (k + 1) + (k + 2) + \dots + (2k - 1) = \tfrac{1}{2}k(3k - 1) \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

2°. B = H + 1 en tevens hebben de basis B en de helling H een gemeenschappelijk punt. Als $H = k$, $B = k + 1$, dan volgt gemakkelijk, dat een partitie van deze soort alleen maar voorkomt als

$$n = (k + 1) + (k + 2) + \dots + 2k = \tfrac{1}{2}k(3k + 1) \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Alle overblijvende partities in ongelijke deelen noemen we nu ter afkorting *gewone* partities. Verder noemen we een partitie *even* of *oneven*, naarmate het een partitie in een even of een oneven aantal deelen is. Dan geldt de

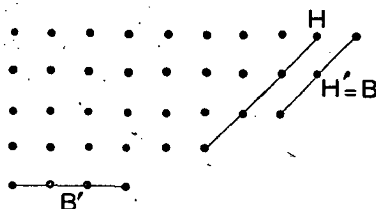
---

[1]) Hierbij is natuurlijk stilzwijgend verondersteld, dat de punten horizontaal en verticaal op gelijke afstanden van elkaar zijn geteekend.

Hulpstelling. Onder de gewone partities van een gegeven natuurlijk getal n komen even veel even als oneven partities voor.

Om dit te bewijzen, verdeelen we alle gewone partities in paren, zoodanig, dat ieder paar juist één even en één oneven partitie bevat.

Zij daartoe eerst p een gewone partitie met de eigenschap $B \leqq H$. In de graphische voorstelling van p verplaatsen we nu de punten van B naar een nieuwe positie rechts van de helling H en evenwijdig daarmede, zoodat deze punten nu de helling H′ van een andere partitie p' gaan vormen. (Uit de veronderstelling, dat p niet tot de eerste der beide uitgezonderde categorieën van partities behoort, volgt, dat de nieuwe figuur werkelijk weer de graphische voorstelling van een partitie is). Dit is voor de daarstraks beschouwde partitie van 37 (waarvoor inderdaad $B \leqq H$ was) aangegeven in de volgende figuur:



Stelt men de basis van de nieuwe partitie door B′ voor, dan is $B' > B$ (daar p een partitie in ongelijke deelen was met B als kleinste deel). Voor p' geldt dus $B' > H'$. Ook is p' weer een gewone partitie. Want anders zou $B' = H' + 1$ moeten zijn en zouden B′ en H′ een punt gemeen moeten hebben. Men ziet gemakkelijk in, dat dit niet mogelijk is, indien men zich H′ naar zijn oude positie als basis B van p terugverplaatst denkt. De beide partities p en p' beschouwen we nu als een bij elkaar behoorend paar. Als we uitgaan van een partitie p met $B > H$, dan kunnen we de punten van de helling H van p verplaatsen naar een nieuwe positie onder B, zóó, dat ze de nieuwe basis B′ van een partitie p' vormen. Voor deze partitie is $H' \geqq H$ en dus $B' \leqq H'$. Ten opzichte van de vorige beschouwing zijn dan alleen de rollen van de beide partities p en p' verwisseld. We hebben nu dus inderdaad alle gewone partities in paren ingedeeld. Daar ieder paar klaarblijkelijk één even en één oneven partitie bevat, is de hulpstelling daarmede bewezen.

Beschouwen we nu *alle* partities in ongelijke deelen van een gegeven natuurlijk getal n, dus ook die van de uitgezonderde categorieën 1° en 2° (die alleen maar voorkomen als n een gegeneraliseerd pentagonaalgetal is). Zij $E(n)$ het aantal even partities in ongelijke deelen van n en $O(n)$ het aantal oneven partities. Merkt men nog

op, dat de beide uitzonderingspartities 1° en 2° even of oneven zijn, naarmate k even of oneven is, dan volgt nu uit het bovenstaande dat

$$E(n) - O(n) = 0 \text{ als } n \text{ geen gegeneraliseerd pentagonaalgetal is;}$$
$$= (-1)^k \text{ als } n \text{ van den vorm } \tfrac{1}{2}k(3k \pm 1) \text{ is } (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Nu is echter $E(n) - O(n)$ de coëfficiënt van x^n, indien het linkerlid van (2) ontwikkeld wordt naar opklimmende machten van x. De zooeven gevonden waarden van deze coëfficiënten bewijzen nu de juistheid van de formule (2) [1].

Uit de formules (1) en (2) volgt nu de identiteit

$$(1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \ldots)$$
$$(1 + p(1)x + p(2)x^2 + p(3)x^3 + \ldots) = 1,$$

waarbij de exponenten in de eerste factor de gegeneraliseerde pentagonaalgetallen zijn. De coëfficiënt van x^n in het product van de beide machtreeksen in het linkerlid moet nu voor $n > 1$ gelijk aan nul zijn, waaruit volgt, dat

(3) $$p(n) - p(n-1) - p(n-2) + p(n-5) + p(n-7) - - p(n-12) - p(n-15) + \ldots. = 0,$$

waarbij $p(0) = 1$ genomen moet worden en de reeks zoover moet worden uitgestrekt, dat de argumenten van p nog niet-negatief blijven. Deze recurrente betrekking is gebruikt om tafels voor $p(n)$ samen te stellen. Mac Mahon heeft $p(n)$ berekend tot en met $n = 200$ [2]). Deze tafel is eerst tot $n = 300$ en later tot $n = 600$ voortgezet door H. Gupta [3]), waarbij hij b.v. vond, dat $p(600)$ een getal van 24 cijfers is. De waarden van $p(n)$ tot en met $n = 40$ laten we hierachter volgen (blz. 72).

Thans wenden we ons tot de tweede vraag, die we ons als probleem hebben gesteld, n.l. de vraag naar het gedrag van $p(n)$ voor groote waarden van n. Reeds boven hebben we opgemerkt, dat $p(n)$ zeer sterk toeneemt als n grooter wordt. Het ligt nu voor de hand om te vragen, *hoe sterk* $p(n)$ toeneemt. Deze vraag werd gesteld en beantwoord door G. H. Hardy en S. Ramanujan [4]). Ze

---

[1]) Dergelijke, z.g. *combinatorische* beschouwingen, als ons nu tot het bewijs van de formule (2) hebben geleid, spelen in de oudere theorie der partities een groote rol. Men zie: J. J. Sylvester, Collected Works, Vol. II (Cambridge, 1908); P. A. MacMahon, Combinatory Analysis, Vol. II (Cambridge, 1916). Een aantal eenvoudige combinatorische beschouwingen zijn ook te vinden in G. H. Hardy en E. M. Wright, An Introduction to the Theory of Numbers (Oxford, 1938), blz. 271—294.

[2]) Proc. London Math. Soc. (2) 17 (1918), blz. 114—115.

[3]) Proc. London Math. Soc. (2) 39 (1935), blz. 142—149 en 42 (1937), blz. 546—549.

[4]) Proc. London Math. Soc. (2) 17 (1918), blz. 75—115.

n	$p(n)$	n	$p(n)$	n	$p(n)$	n	$p(n)$
1	1	11	56	21	792	31	6842
2	2	12	77	22	1002	32	8349
3	3	13	101	23	1255	33	10143
4	5	14	135	24	1575	34	12310
5	7	15	176	25	1958	35	14883
6	11	16	231	26	2436	36	17977
7	15	17	297	27	3010	37	21637
8	22	18	385	28	3718	38	26015
9	30	19	490	29	4565	39	31185
10	42	20	627	30	5604	40	37338

gebruikten daarbij een methode, die het uitgangspunt geworden is voor de moderne ontwikkeling van de additieve getallentheorie en waaraan speciaal de namen van Hardy en Littlewood verbonden zijn. Deze methode gebruikt veel dieper liggende hulpmiddelen, dan de boven toegepaste elementaire combinatorische beschouwingen. Bovendien wordt door deze methode de min of meer speciale theorie der partities in verband gebracht met algemeene mathematische theorieën. Het is nu uit den aard der zaak niet meer mogelijk, om hier in het kader van een voordracht als deze de bewijzen van deze nieuwere resultaten mede te deelen. We zullen ons er dus toe moeten beperken om hier een overzicht te geven van de belangrijkste resultaten van de moderne theorie der partities, die dus in de methoden van Hardy en Ramanujan zijn oorsprong heeft.

Ten aanzien van de vraag, hoe sterk $p(n)$ toeneemt, als n grooter wordt, bewezen Hardy en Ramanujan in de eerste plaats met nog alleen elementaire hulpmiddelen de existentie van twee positieve constanten A en B zoodanig, dat

$$e^{A\sqrt{n}} < p(n) < e^{B\sqrt{n}},$$

zoodat $\frac{1}{\sqrt{n}} \log p(n)$ tusschen twee van n onafhankelijke positieve grenzen blijft, als n tot oneindig nadert. Met behulp van aanmerkelijk dieper liggende hulpmiddelen (n.l. een vroeger door Hardy en Littlewood bewezen z.g. „Tauberian theorem") konden ze aantoonen, dat $\frac{1}{\sqrt{n}} \log p(n)$ zelfs een limiet heeft, als n tot oneindig nadert en wel de limiet

$$C = 2\sqrt{\frac{\pi^2}{6}} = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}. \tag{4}$$

Dit is later met alleen elementaire hulpmiddelen (dus zonder het bedoelde „Tauberian theorem") bewezen in een zeer lezenswaardig artikel van K. Knopp en I. Schur [1]), dat ook nog een aantal andere formules van soortgelijken aard behandelt. Hardy en Ramanujan bewezen echter nog veel meer. Niet alleen konden ze hun zooeven genoemd resultaat verscherpen tot

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}}\, e^{C\sqrt{n}} \text{ }^{2)}$$

maar zelfs bewezen ze een formule, die nog weer veel meer zegt. Wel waren daarbij zeer diep liggende hulpmiddelen noodig (complexe integratie, Farey-verdeeling en een transformatieformule uit de theorie der modulaire functies) en Hardy en Ramanujan zeggen ook, dat „the proof is somewhat intricate", maar het resultaat is dan ook, zooals zij zeggen van „an accuracy which will, we think, be found to be quite startling". De bedoelde formule luidt

$$(5)\quad p(n) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \sum_{k \leqq a\sqrt{n}} A_k(n)\sqrt{k}\, \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{\sqrt{n - 1/24}}\, e^{\frac{C}{k}\sqrt{n - 1/24}}\right) + R(n).$$

Hierin is C de door (4) bepaalde constante, a een willekeurig positief getal, terwijl k alle natuurlijke getallen doorloopt, die $\leqq a\sqrt{n}$ zijn. Verder is $A_k(n)$ een zeer gecompliceerde arithmetische som van $24k$-de machtswortels uit de eenheid, die hier verder niet ter zake doet. Het merkwaardige echter is, dat de restterm $R(n)$ de eigenschap heeft, dat $\sqrt[4]{n}.\ R(n)$ begrensd blijft, als n tot oneindig nadert en $R(n)$ dus zeker tot nul nadert. Neemt men nu echter in aanmerking, dat $p(n)$ een geheel getal is, dan volgt, *dat $p(n)$ voor voldoend groote waarden van n gelijk is aan het geheele getal, dat het dichtst bij de in het rechterlid van (5) optredende som ligt.*

Toch blijven er, zooals Hardy en Ramanujan zelf opmerken, nog eenige vragen open. In de eerste plaats zegt het resultaat niet, *hoe groot* men n moet nemen, opdat de vermelde nauwkeurigheid zal zijn bereikt. In de tweede plaats doet zich nu de vraag voor, of de reeks die men krijgt, als men in (5) over alle

---

[1]) Math. Zeitschr. 24 (1925), blz. 559—574.

[2]) Het teeken „$\sim$" („asymptotisch gelijk") drukt uit, dat het quotient van de beide uitdrukkingen links en rechts van dit teeken de limiet 1 hebben, als n tot oneindig nadert. Een bewijs van deze formule met meer elementaire hulpmiddelen is gegeven door V. G. Avakumovic in Amer. Journ. of Math. 62 (1940), blz. 877—880.

natuurlijke getallen k sommeert, convergent is, en zoo ja, of dan misschien $p(n)$ door de som van deze oneindige reeks wordt voorgesteld. Beide vragen zijn sindsdien beantwoord en wel in publicaties van H. Rademacher en D. H. Lehmer.

Voordat we op de resultaten van deze publicaties verder ingaan is het nu (vooral historisch) interessant om eerst nog enkele resultaten van Ramanujan te bespreken. Laatstgenoemde vermoedde op grond van de door MacMahon berekende tafel voor $p(n)$ (die tot $n = 200$ loopt) dat de getallentheoretische functie $p(n)$ de volgende eigenschappen heeft:

(6) $p(5m + 4) \equiv 0 \pmod{5}$, $p(7m + 5) \equiv 0 \pmod{7}$,
$$p(11m + 6) \equiv 0 \pmod{11}.$$

Later gelukte het hem ook werkelijk deze congruenties te bewijzen [1]). Nu kwam hij er toe het veel algemeenere vermoeden uit te spreken, dat als $\delta = 5^a 7^b 11^c$ en $24\lambda \equiv 1 \pmod{\delta}$ de congruentie

$$p(m\delta + \lambda) \equiv 0 \pmod{\delta}$$

zal gelden. Voor de gevallen $\delta = 5^2$ en $\delta = 7^2$ is dit vermoeden bewezen door H. B. C. Darling [2]) en L. J. Mordell [3]), terwijl door Hardy later in ongepubliceerde manuscripten van Ramanujan eveneens bewijzen voor deze gevallen zijn gevonden, alsmede ook voor het geval $\delta = 11^2$. Uit de tafel van Gupta [4]) bleek echter [5]) de onjuistheid van het vermoeden voor $\delta = 7^3$ daar $24 . 243 \equiv 1 \pmod{343}$ is en dus $p(243)$ door 343 deelbaar zou moeten zijn, terwijl uit de genoemde tafel blijkt, dat $p(243) =$ 13397 82593 44888 en dit getal is niet deelbaar door $7^3 = 343$. In zijn volle algemeenheid kan dus het vermoeden van Ramanujan niet juist zijn. Voor $\delta = 5^3$ werd echter de juistheid van het vermoeden bewezen door Krečmar [6]).

D. H. Lehmer [7]) trachtte nu $p(599)$ en $p(721)$ te bepalen door een aantal termen van de som (5) te berekenen. Wel was het, zooals boven reeds is opgemerkt, niet bekend hoe groot n moest zijn, opdat deze formule de exacte waarde van $p(n)$ zal leveren.

---

[1]) Collected Papers, Nos. 25, 28 en 30. Van de beide eerste congruenties zijn ook bewijzen te vinden op blz. 286—287 van het in noot [1]) op blz. 71 genoemde boek van Hardy en Wright.

[2]) Proc. London Math. Soc. (2) 19 (1921), blz. 350—372.

[3]) Proc. London Math. Soc. (2) 20 (1922), blz. 408—416.

[4]) Proc. London Math. Soc. (2) 39 (1935), blz. 142—149 en 42 (1937), blz. 546—549.

[5]) S. Chowla, Congruence properties of partitions, Journ. London Math. Soc. 9 (1934), blz. 247.

[6]) Bull. de l'Acad. des sciences de l'URSS (7) 6 (1933), blz. 763—800.

[7]) Journ. London Math. Soc. 11 (1936), blz. 114—118.

Het was echter uit numerieke berekeningen van Hardy en Ramanujan gebleken, dat voor $n = 100$ de eerste zes termen van de reeks (5) een som 1905 69291.996 hebben, hetgeen slechts 0.004 minder was dan de door de tafel van MacMahon geleverde waarde van $p(100) = 1905\ 69292$. Tevens vonden zij, dat voor $n = 200$ de eerste acht termen van de reeks (5) een som 397 29990 29388.004 hebben, hetgeen slechts 0.004 meer is dan de door de tafel van MacMahon geleverde waarde van $p(200) = 397\ 29990\ 29388$. Door in de beide gevallen $n = 599$ en $n = 721$ respectievelijk 18 en 21 termen van de reeks (5) te beschouwen vond Lehmer de waarden

$$p(599) = 4353\ 50207\ 84031\ 73482\ 70000$$

en

$$p(721) = 16\ 10617\ 55750\ 27947\ 76355\ 34762$$

en meende deze resultaten op grond van de door Hardy en Ramanujan opgedane ervaringen als juist te mogen aannemen. Door Gupta, die toen zijn tafel pas tot $n = 300$ gereed had, en die om de berekeningen van Lehmer te verifieeren daarna zijn berekeningen tot $n = 600$ uitstrekte, werd de juistheid van het resultaat voor $p(599)$ inderdaad bevestigd. De berekeningen van Lehmer werden door dezen hoofdzakelijk uitgevoerd om het vermoeden van Ramanujan voor $\delta = 5^4 = 625$ en $\delta = 11^3 = 1331$ te verifieeren. Men heeft n.l. $24.599 \equiv 1 \pmod{5^4}$ en $24.721 \equiv 1 \pmod{11^3}$. Indien dus het vermoeden van Ramanujan voor deze waarden van δ juist zal zijn, moet in ieder geval

$$p(599) \equiv 0 \pmod{625}, \quad p(721) \equiv 0 \pmod{1331}$$

zijn. Inderdaad zijn de door Lehmer aangegeven waarden voor $p(599)$ en $p(721)$ respectievelijk door 625 en 1331 deelbaar.

De meest belangrijke bijdrage tot ons probleem sedert Hardy en Ramanujan werd echter in 1936 geleverd door H. Rademacher[1]), die bewees, dat men uit (5) een convergente reeks verkrijgt, indien men hierin $e^{\frac{C}{k}\sqrt{n-1/24}}$ vervangt door $2 \sinh \frac{C}{k}\sqrt{n-1/24}$ [2]) en bovendien is de som van deze nieuwe reeks gelijk aan $p(n)$. M.a.w. Rademacher bewees de formule

$$(7) \qquad p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n)\sqrt{k}\, \frac{d}{dn}\left(\frac{\sinh \frac{C}{k}\sqrt{n-1/24}}{\sqrt{n-1/24}}\right).$$

---

1) Proc. of the National Acad. of Sciences 23 (1937), blz. 78—84; Proc. London Math. Soc. (2) 43 (1937), blz. 241—254.

2) Hierin is sinh de hyperbolische sinus, gedefinieerd door

$$\sinh x = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

Bovendien gaf hij een schatting van de fout, die men maakt, als men deze reeks na een gegeven aantal termen afbreekt, zoodat men hierdoor in staat gesteld is om $p(n)$ inderdaad exact te berekenen. Daardoor was Rademacher speciaal in staat om de juistheid van de boven aangegeven waarden voor $p(599)$ en $p(721)$ te bewijzen. Belangrijk is ook, dat Rademacher later (in samenwerking met H. S. Zuckerman) bewees, dat zijn methode op veel algemeenere problemen kan worden toegepast, waarop we hier echter niet verder zullen ingaan [1].

Door de ontdekking van de formule (7) werd nu natuurlijk de door Hardy en Ramanujan opgeworpen vraag naar de convergentie van de reeks, die uit de som in (5) ontstaat, als men daarin k tot oneindig laat doorloopen, minder belangrijk. Niettemin vermelden we hier toch, dat door Lehmer werd bewezen [2], dat deze reeks divergent is. Zijn bewijs berustte op een nauwkeuriger onderzoek van de in (5) en (7) optredende sommen $A_k(n)$. Dit onderzoek is later door hem voortgezet [3]) met de bedoeling om scherpere schattingen te geven van de restterm, die men krijgt, als men de reeks van Rademacher na een gegeven aantal termen afbreekt.

Volledigheidshalve komen we nog even terug op het daarstraks vermelde vermoeden van Ramanujan. Door G. N. Watson werd n.l. de juistheid van dit vermoeden voor het geval $\delta = 5^a$ volledig bewezen [4]. Hij corrigeerde voorts dit vermoeden in het geval $\delta = 7^b$ door te bewijzen: als $\delta = 7^b$ en b is een natuurlijk getal, en als $24\lambda \equiv 1 \pmod{7^{2b}}$, $1 < \lambda < 7^{2b}$ dan is voor $n \equiv \lambda \pmod{7^{2b}}$ voldaan aan $p(n) \equiv 0 \pmod{7^{b+1}}$. Of het geval $\delta = 11^c$ reeds volledig opgehelderd is, is mij niet bekend, alhoewel Watson in zijn in noot [4]) vermelde publicatie beloofde op dit geval te zullen terugkomen. Wel heeft Lehmer voor dit geval nog enkele numerieke berekeningen uitgevoerd [5]. Daar n.l. $11^3 = 1331$, $11^4 = 14641$ en $24.721 \equiv 1 \pmod{1331}$, $24.14031 \equiv 1 \pmod{14641}$ zou uit de juistheid van het vermoeden van Ramanujan voor $\delta = 11^3$ en voor $\delta = 11^4$ speciaal moeten volgen, dat $p(721 + 1331) = p(2052)$ en $p(14031)$ respectievelijk door 11^3 en 11^4 deelbaar

[1]) Hiervoor zie men de in 1938 door Rademacher voor de American Mathematical Society gehouden voordracht, afgedrukt in het Bulletin of the American Mathematical Society 46 (1940), blz. 59—73.

[2]) Journ. London Math. Soc. 12 (1937), blz. 171—176.

[3]) Transactions of the Amer. Math. Soc. 43 (1938), blz. 271—295 en 46 (1939), blz. 362—373.

[4]) Journ. für die reine und angewandte Math. 179 (1938), blz. 97—128.

[5]) Bulletin of the Amer. Math. Soc. 44 (1938), blz. 84—90.

moeten zijn. Om dit te verifieeren bepaalde Lehmer de waarden van $p(2052)$ en $p(14031)$ met behulp van de reeks van Rademacher. Hij vond getallen van respectievelijk 47 en 127 cijfers, die inderdaad respectievelijk door 11^3 en 11^4 deelbaar bleken te zijn.

Het is wel duidelijk, dat het practisch onmogelijk is om een getal als $p(14031)$ te berekenen met behulp van de recurrente betrekking (3) en nög minder door alle partities werkelijk uit te schrijven. Men bedenke, dat berekend is, dat indien men het heelal tot de verst verwijderde nevelvlekken toe (die ongeveer een half milliard lichtjaren verwijderd zijn) volledig met electronen wil opvullen, het hiertoe benoodigde aantal electronen aangegeven wordt door een getal van 118 cijfers. Het getal $p(14031)$ is nog meer dan milliard maal zoo groot!

We besluiten met de opmerking, dat de in het begin van deze voordracht gestelde problemen betreffende de berekening van $p(n)$ door de formule van Rademacher wel beschouwd kunnen worden als op buitengewoon bevredigende wijze te zijn opgelost!

'T WISKUNDE-ONDERWIJS EN DE LERAAR [1])

door

G. A. JANSSEN.

M. d. V. Misschien heb ik, naar uw mening, een wat al te ruim gebruik gemaakt van de vrijheid die U mij liet, nl. om *geheel* naar eigen keuze, een onderwerp uit de didactiek der wiskunde voor U te behandelen. In dat geval bied ik U bij voorbaat mijn verontschuldiging aan. Evenwel wil ik beginnen met mijn zienswijze te verklaren, althans een poging daartoe te wagen.

De vraag: Wat is didactiek, voert als vanzelf naar twee verwante begrippen: methodiek en paedagogiek. Paedagogiek is de wetenschap, die zich bezig houdt met de studie van „het opvoeden". Verstaan we nu, met Jan Ligthart, onder opvoeden: „Opzettelijke, doelbewuste inwerking op geest en gemoed", dan komen we in de eerste plaats tot de bekende ontdekking dat definiëren een moeilijke bezigheid is. Waar de meetkundige echter bij het spreken over begrippen als punt en lijn bij zijn hoorders ook een flinke dosis goodwill onderstelt, willen ook wij dezelfde goodwill betrachten t. o. v. de paedagoog en met hem aannemen dat de begrippen geest en gemoed algemeen bekend mogen worden ondersteld.

De paedagoog heeft dus een doel, dat hij opzettelijk nastreeft. Om een doel te bereiken, moet de weg daarheen gevonden worden. Dit aanwijzen van den weg, en liefst de meest geschikte, nu is de taak der Methodiek. Die aangewezen weg dient te worden afgelegd, maar hoe?

Moeten we kruipen, lopen, fietsen of liften; is veelvuldige rust noodzakelijk of is 't beter voortdurend in gang te blijven? Kan het klimmen op een hoogte om wat van het uitzicht te genieten nuttig zijn of zou 't juist duizelig maken? Is 't goed om regelmatig om te zien naar de reeds afgelegde weg of is dat enkel tijdverlies? Is 't gewenst om bij het nemen van een hindernis een flink eind terug te gaan om een aanloop te kunnen nemen of moet de sprong direct gewaagd worden? Of is een algemeen voorschrift van hoe te gaan niet mogelijk? Hangt dat soms in de eerste plaats af van

---

[1]) Rede gehouden op 28 Dec. 1945 voor „Wimecos".

hem die de weg gaan moet en in niet mindere mate van de gids die leidt? Van diens vindingrijkheid, van diens handigheid; heeft die de vervoermiddelen bij de hand die 't meest geëigend zijn voor elk stuk van de weg, die rust commandeert als dat nodig is en looppas wanneer de reiziger anders in slaap dreigt te vallen?

Antwoord te geven op al deze vragen is de taak der didactiek. De didacticus is dus de gids, de reisleider, van wien 't wèlslagen van de reis in hoge mate afhangt. 't Doel kan schitterend zijn en de weg ideaal, toch kan de reis geheel mislukken o.a. doordat de reisleider niet voor zijn taak berekend is. Zeker, ook de reiziger zelf spreekt een woordje mee bij het al of niet doen slagen van een reis, maar een zeer belangrijke factor in dit geheel is de gids, de reisleider, de didacticus, dus de leraar.

Mag nu het spreken over de leraar zelf tot onderwerp gekozen worden uit de didactiek der Wiskunde? 'k Meen van wel. Al zijn spreken, handelen, zwijgen moet didactisch verantwoord zijn, hij moet met de didactiek vergroeid zijn. De wortelen van alle didactiek vinden in den leraar hun voedingsbodem en bron, zodat ik meen gegronde redenen te hebben het onderwerp: „'t Wiskunde-onderwijs en de leraar" te rekenen tot een onderwerp uit de didactiek der Wiskunde.

Na deze inleiding om de keuze van mijn onderwerp te rechtvaardigen, moet ik nu direct waarschuwen voor verwachtingen die niet vervuld zullen worden. 'n Volledige analyse zou boven mijn krachten gaan niet alleen, doch zich ook niet lenen tot een behandeling in eén korte voordracht. 't Gesprokene wil enkel zijn een getuigenis van een leraar over een leraar. 'n Hachelijke onderneming? Misschien wel en toch is 't de moeite waard een poging daartoe te wagen. Er zijn evenwel gevaren aan verbonden. 't Kan een zelfportret worden, dat, bij zelfingenomenheid gemakkelijk te licht van tint wordt of is de betrokkene pessimistisch gestemd t. o. v. eigen kunnen, dan zal 't beeld gevaar lopen onnodig somber geschetst te worden. Afstand nemen en zelfkritiek inschakelen, misschien dat 't zo lukken wil het bedoelde getuigenis te geven.

Op één gevaarlijke kant van deze onderneming moet ik echter nog nadrukkelijk wijzen. Misverstand is anders niet uitgesloten. Om dit te voorkomen, kan ik niet beter doen dan U in den geest meevoeren naar een padvindersbijeenkomst. De vlag wordt geheschen; de padvinderswet wordt opgezegd. 't Heet daar o.a. „Een padvinder *is* trouw." 'n Critisch aangelegde toehoorder is om te beginnen geneigd te glimlachen of zich te ergeren. 't Mocht wat. Wat weet zo'n ventje van trouw, laat staan dan dat hij trouw *is*.

Nee, als de wet nu nog zei: een p.v. zal trachten trouw te zijn of zo iets, dan kon 't er nog mee door, maar dit: een p.v. *is* trouw, nee, dat gaat te ver, dat maakt alle jongens tot leugenaar. Deze en dergelijke beschouwingen zijn normaal en begrijpelijk op 't eerste gehoor. Bij enig nadenken echter is 't ook mogelijk oog te krijgen voor de enorme psychologische waarde die in dit herhaalde: „de p.v. *is* trouw" kan besloten liggen. 't Wordt een korte formulering van:

1⁰. wat van een ieder geëist wordt,
2⁰. een belijdenis van onmacht,
3⁰. een belofte om z'n uiterste best te zullen doen dat ideaal zo dicht mogelijk te benaderen,
4⁰. de zekerheid dat de leiding je vertrouwt.

De korte formulering is nodig om er in gehamerd te worden, juist, om, op 't kritieke moment als vanzelf naar voren te komen, levensgroot voor je te staan net op het moment dat je zou willen vallen. Wie weet hoe velen voor vallen behoed zijn juist door het weten dat de leiding je vertrouwt, dat men van je verwacht trouw te zullen zijn en je plicht te zullen doen, immers de p.v. *is trouw*. Dus noch de leider beweert volmaakt te zijn, noch eist hij dat van zijn jongens, 't wordt alleen allen als een ideaal voor ogen gesteld, een ideaal dat met de inzet van zijn gehele persoonlijkheid moet worden nagestreefd. Aan deze padvindersgeschiedenis verzoek ik U voortdurend te willen denken bij de verdere gang van ons onderwerp. 't Schept voor mij de mogelijkheid van korte formuleringen en 't voorkomt bij U een glimlach of erger.

Drie eisen aan een leraar te stellen, die ik als essentieel zie, wil ik in 't bijzonder noemen:

1⁰. De Wiskundeleraar gelooft in zijn vak.
2⁰. Hij is deemoedig.
3⁰. Hij is zich bewust dienaar te zijn.

Elk dezer eisen, feiten, wenselijkheden of doelstellingen, net wat U wilt, zullen we in 't kort nader onder 't oog zien.

1⁰. Hij gelooft in zijn vak.

We gaan daarbij uit van de schriftuurlijke definitie van geloof: „'t Geloof is een vaste grond der dingen die men hoopt." [1]) 'k Ben me hierbij bewust dat deze definitie tegen een logische kritiek niet bestand is. Hoe kan men vaste grond hebben voor, dus zeker weten dingen die men hoopt, immers is van hopen alleen sprake bij dingen die men nog niet kent. Inderdaad en toch ... geloven is een *zeker*

---

[1]) Hebreën 11 : 1.

weten van de dingen die men hoopt. 't Schijnt niet anders mogelijk dan te concluderen: òf de definitie deugt niet òf er hapert wat aan de logica. En tòch is dit slechts schijn. Kennelijk hebben we met een uitspraak te doen die niet vatbaar is voor de kille regels der logica. 'n Andere denkcategorie dient hier gehanteerd te worden, van hogere orde of nevengeschikt aan de logica, daarover kan men van mening verschillen, als we 't maar eens zijn over 't geheel-anders zijn van beide categoriën. 't Waarheidsgehalte van een dergelijke definitie tegenover dat van een logisch onaanvechtbare, kan enigszins vergeleken worden met het volgende: 'n knaap die nog weinig meetkundig geschoold is, is doordrongen van de waarheid van de uitspraak: „Een zijde van een driehoek is kleiner dan de som der beide andere zijden." Reeds in de box was 't voor de betrokkene een waarheid waarnaar voortdurend gehandeld werd. Na de logische fundering van deze stelling is 't gevaar niet denkbeeldig dat aanvankelijke zekerheid heeft plaats gemaakt voor doffe twijfel. 'n A-priori-zekerheid loopt gevaar vervangen te worden door een op zijn minst betwijfelbaar gegeven. Weliswaar gaat deze vergelijking niet geheel op en zal men geneigd zijn mij tegen te werpen dat juist de twijfel aan a-priori-zekerheden de oorzaak is geweest van een zeer vruchtbare uitbouw der meetkunde, toch koester ik de hoop U willig te hebben gemaakt met mij uit te gaan van: geloven is een zeker weten van de dingen die men hoopt. In dien zin althans wil de uitspraak verstaan worden: de wiskunde leraar gelooft. 't Wiskunde onderwijs heeft al aan vele aanvallen bloot gestaan, 't heeft z'n bestaansrecht moeten verdedigen tegen deskundigen zowel als tegen ondeskundigen, de wiskunde is door dichters hemelhoog geprezen zowel als verafschuwd, ongeletterden zowel als geleerden meenden soms als om strijd dat onderwijs te moeten aanvallen, paedagogen en psychologen maakten het tot voorwerp van hun onderzoek en kritiek en kwamen daarbij niet steeds tot eensluidende conclusies. Al die kritiek, terecht of ten onrechte geuit, de lof zowel als de blaam, de resultaten van ernstig bedoelde wetenschappelijke pogingen om zijn mening te kunnen funderen, dat alles is nodig en onmisbaar. In elke kritiek schuilt steeds een kern van waarheid en er valt nog steeds veel te verbeteren. De leraar dient een open oog te hebben voor alle gebreken, die noodzakelijk aan zijn onderwijs kleven, doch boven 't rumoer van alle afkeurende òf prijzende stemmen uit klinkt de blijde toon van zijn geloof in de waarde van zijn vak. Die toon houdt hem staande, geeft hem levensmoed en levensvreugde tevens, dat zekere weten van de dingen die men hoopt.

Als Sir W. Hamilton [1]) opmerkt dat de wiskunde zo gemakkelijk is omdat er geen inspanning voor nodig is, „aangezien alle conclusies noodzakelijke gevolgen zijn van de premissen", dan is daarin zeker een kern van waarheid. De bezigheid echter van het *ontdekken* (let op de letterlijke betekenis van dit woord!) blijkt voor velen onoverkomelijke moeilijkheden te hebben. H.'s mening is dan ook hoofdzakelijk gebaseerd op 't wiskundeonderwijs zoals dit toen gedoceerd werd in zuiver syllogistische vorm. Deze kritiek nog eens te doen horen heeft dan ook vooral zin om te doen zien hoe 't wiskundeonderwijs sedertdien reeds verbeterd is.

Kritiek van ondeskundigen, die vaak door middel van de pers ter kennis van het grote publiek gebracht wordt, heeft meestal zijn grond in allerlei toevallige bijkomstigheden en betreft maar zelden klachten over 't wiskundeonderwijs als geheel. Toch zal de leraar goed doen nauwkeurig op deze klachten te letten al zou 't tenslotte alleen maar zijn om zich meer bewust te realiseren of de weg die hij bewandelt wel de juiste is.

Wanneer een man als Schopenhauer [2]) 't niet beneden zich acht om bewust falsificaties te verrichten teneinde de Wiskunde afbreuk te doen en 't nut van 't wiskundeonderwijs te bestrijden, dan blijkt daaruit hoe sterk ook de antipathie tegen de Mathesis zelfs bij grote geesten zijn kan.

Wanneer [2]) Novalis de lof zingt van de wiskunde in schone bewoordingen:

„Das Leben der Götter ist Mathematik. Alle göttlichen Gesandten müssen Mathematiker sein. Reine Mathematik ist Religion. Die Mathematiker sind die einzig Glücklichen. Der Mathematiker weiss alles u.s.f."

dan is dat als een luchtspiegeling, die zich plots aan ons oog voordoet: mooi voor een ogenblik, maar niet echt en zeer vergankelijk.

Anders wordt 't wanneer een paedagoog van professie J. W. A. Young zich concentreert op 't wiskunde-onderwijs en ons van de resultaten van dat onderzoek mededeling doet in z'n [3]) „Teaching of Mathematics".

Hij concludeert ongeveer als volgt:

1°. De Wiskunde is van groot practisch belang. De techniek zou zonder de wiskunde nooit zo'n vlucht genomen hebben.

---

[1]) Edinburgh Review (1836).

[2]) Volgens Pringsheim: Ueber Wert und angeblichen Unwert der Mathematik. Festrede München 1904.

[3]) Teaching of Math. in the elementary and the secondary school.

't Tegenwoordige leven eist steeds meer mensen die op de hoogte zijn van bepaalde wiskundige feiten, berekeningen enz. 't Practisch belang van wiskunde voor den mens in 't algemeen is dus wel onbetwistbaar, zij het echter ook voor den gemiddelden mens slechts indirect.

2^{0}. Wiskunde heeft ook een meer ideëele waarde. 't Geheel enige van de wiskunde is dat verschillende mensen in verschillende eeuwen tot gedachten gekomen zijn, die tot gelijkluidende resultaten voerden.

3^{0}. De Wiskunde is als 't ware met de natuur vergroeid, tenminste zoals de laatste door de menselijke geest wordt geinterpreteerd. De natuur is zó volledig mathematisch, dat sommige van de meer exacte natuurwetenschappen, speciaal astronomie, physica, in hun theoretische beschouwingen zuiver mathematisch zijn, terwijl andere wetenschappen, die tot nu toe gedwongen waren te blijven bij hun natuurverschijnselen en het onstrenge van hun bevindingen, ook hun wetenschappen zijn gaan ontwikkelen volgens wiskundig ideaal in de vaste overtuiging dat wiskundige betrekkingen moeten bestaan. De poging om dieper in 't wonder der natuur door te dringen, dwingt tot ontwikkeling van mathematische problemen.

4^{0}. De wiskunde kweekt een bepaalde denkwijze aan, zij maakt 't noodzakelijk zich te concentreren op één punt, tot de kern ervan door te dringen met terzijdestelling van alle bijkomstigheden, iets wat ook later voor allerlei kwesties van belang is. Men leert de kunst van schiften en uitpluizen, nodig voor 't vellen van een juist oordeel. Men moet, ook in 't practische leven, weten te onthouden, te ziften, te combineren enz. Nu is 't Wiskunde-onderwijs bijzonder geschikt voor het begin van een dergelijke training, daar zijn gegevens en onderstellingen, vooral in den aanvang, zo weinig gecompliceerd zijn. Wel is er een groot verschil tussen de eenvoudiger gegevens van de wiskunde en de zeer gecompliceerde van de sociale samenleving, maar toch komen we langs deze ongetwijfeld tot enig begrip van de laatste. Geen vak wat zich daartoe beter leent dan juist de wiskunde. Vaak meent men dat de wiskunde niet voor 't practisch leven bruikbaar is, omdat „men nergens math. zekerheid verwachten mag". Toch blijft dit altijd waar: Hij, die wiskundig heeft leren denken (hoeft geen wiskundige te zijn) zal geen hogere graad van zekerheid toekennen dan de premissen toelaten. Hij zal op waarschijnlijkheid bouwen, maar daarbij tevens nooit vergeten dat 't slechts waarschijnlijkheid is.

5°. „No head for mathematics" is een sprookje. Ieder normaal verstand kan de elementaire wiskunde redelijk volgen, mits de wijze van doceren didactisch verantwoord is.

6°. 't Wiskunde-onderwijs heeft nog diverse bijkomstige voordelen:

't leert allerlei kwesties generaliseren,

't leert symbolische taal,

't geeft 't genot van het weten om het weten zelf en niet om geldelijk gewin,

't kweekt liefde tot waarheid aan,

't leert zelfonderzoek,

't versterkt het aesthetisch gevoel,

't kweekt 't voorstellingsvermogen aan,

't bevordert netheid, accuraatheid enz.

Tot zover de conclusies die Young trekt. Hoewel deze en dergelijke vertogen zeker waarde hebben, zult U misschien denken als ik: 't Moet niet zo heel moeilijk zijn dergelijke goede eigenschappen bij andere vakken te ontdekken en wat nog erger is 't is niet onmogelijk juist 't tegendeel te beweren van diverse der beweerde goede eigenschappen.

Een aardige illustratie hiervan geeft 't artikel van Dr. E. W. Beth [1]): De Psychologische argumenten en Richtlijnen voor de vernieuwing van het onderwijs in de wiskunde. Young, die zoals we zo juist zagen, zegt dat dit steeds waar blijft: „Hij die wiskundig heeft leren denken zal geen hoger graad van zekerheid toekennen dan de premissen toelaten," trekt zelf uit onderzoekingen van anderen conclusies waarover Beth opmerkt: „de onderzoekers zelf hadden trouwens uit hun resultaten helemaal geen sensationele conclusies getrokken als door Young geschetst." Dat onderzoek betrof hier de beroemde kwestie van de „Transfer of Training". 'n Veelomstreden vraag. Elk experiment wat dienstig kan zijn om hierin ons inzicht te verhelderen, dient sterk aangewakkerd en toegejuicht te worden. Toch, indien ergens, dan is hier wel erg duidelijk wat 't zeggen wil: de wiskunde-leraar gelooft. Dit geloof is hier van een zodanige kracht, dat, mocht ooit een experiment tot een tegengestelde conclusie nopen, dan is hij, die gelooft, er zeker van dat hier de fout bij het experiment zelf gezocht moet worden. Zet dit geloof dan aan tot werkeloosheid op dit gebied? Integendeel, 't kan een stimulans zijn om steeds meer materiaal voorhanden te hebben om ook ongelovigen te kunnen overtuigen en niet minder

---

1) Euclides Jg. 16, No. 1, blz. 1.

om zelf gesterkt te worden in zijn overtuiging. Zo blijft de wiskunde-leraar werken en aanmoedigen tot onderzoek, gedragen door het geloof in de waarde van zijn vak èn voor de leerling persoonlijk èn voor de maatschappij als geheel.

Als tweede eis noemden we: de leraar is deemoedig. Vooraf wil ik nog even herinneren aan wat over de padvinder is gezegd.

Waarom komt mij de eis van deemoed als essentieel voor? Misschien is zij bij wijze van contrast voor 't voetlicht gekomen. De natuur is nl. vaak sterker dan de leer. Immers „de leer" dwingt nergens zó tot deemoed als juist hier. Alleen de wiskunde heeft tot gewoonte elk misbruik vrijwel terstond te straffen. Zo ooit, dan komen we door de wiskunde tot het besef dat alle menselijk kennen en kunnen slechts „ten dele" is.

't Maakt bescheiden wanneer ik bekennen moet dat 't begrip „partities" voor 't eerst door 't convocaat van deze vergadering onder mijn aandacht kwam of dat ik weet dat veel van wat eens mijn geestelijk bezit was, reeds lang onder de drempel van mijn bewustzijn gedaald is.

De deemoedshouding wordt echter nog dwingender.

Wanneer Prof Schuh [1]) zegt: „Bij het kiezen van de mate van strengheid moet de docent welbewust een keus doen. Zegt hij, wat nu en dan onvermijdelijk is, dingen die niet door den beugel kunnen, dan moet dat niet zijn uit onwetendheid, maar op grond van degelijke paedagogische of didactische overwegingen. Dit brengt mede dat de wiskunde-docent zeer ver boven zijn stof dient te staan niet alleen wat strengheid van behandeling betreft maar ook wat uitgestrektheid van het gebied aangaat, daar toch de docent moet kunnen beoordelen wat met het oog op de toepassingen voor het onderwijs van belang is en wat niet."

Of wanneer Dr. E. J. Dijksterhuis [2]) zich als volgt uit: Epistemisch handelt een docent wanneer bij hem de voortdurende bereidwilligheid, de kracht en de consequentie bestaat, om telkens weer volledig rekenschap te vragen van de betekenis van alle gebezigde termen, van de herkomst van alle toegepaste stellingen, van alle gebruikte formules, van alle aangehaalde feiten", dan moet ik bekennen, inziende dat 't zó zou moeten zijn, dat 'k telkens en telkens weer tekort schiet zelfs in mijn dagelijkse arbeid. Allerlei kleine ervaringen dwingen tot de deemoedshouding. Enkele voorbeelden moge ik hier aanhalen, voorbeelden, die door ieder uwer met tientallen kunnen worden aangevuld, waaruit blijkt dat 't ons ook in

[1]) Euclides Jg. 4, No. 4, blz. 184.
[2]) Euclides Jg. 13, No. 4, blz. 181.

eenvoudige dingen in de les vaak aan begrip schort of dat we, opgevoed bij en tot een kritische houding tegenover alles wat onze aandacht vraagt, telkens weer ontdekken dat we dingen gedachteloos napraten. B.v.:

Slordig taalgebruik.

De uitdrukking *„twee aan twee”* wordt juist gebruikt in: „Wanneer van een stelsel lijnen gegeven is dat zij elkaar twee aan twee snijden...” en foutief in „Een par. is een vierhoek waarvan de zijden twee aan twee evenwijdig zijn.”

De uitdrukking *„natuurlijk”* heeft vaak de zin van zijn tegendeel. Als we iets niet kunnen verklaren of niet willen uitleggen, wordt ’t „natuurlijk” genoemd en dit wordt met te meer klem uitgesproken naarmate persoonlijke onmacht gevoeld wordt. Zó zelfs dat de waarschuwing aan onze leerlingen niet overbodig is: indien ooit iemand op je aankomt met de bewering „natuurlijk” is dit of dat zo, wantrouw hem, vraag in elk geval naar zijn geloofsbrieven.

Willekeurig.

De woorden willekeurig en onwillekeurig worden in de gewone omgangstaal soms door elkaar gebruikt. B.v. in „Onwillekeurig praatte hij zijn mond voorbij en in „Geheel willekeurig” kon de bewaker met de gevangenen omspringen” zijn voorbeelden van gebruik in hun oorspronkelijke betekenis. Op de vraag: „Waarom deed je dat?” kan met volkomen gelijke bedoeling geantwoord worden: „Onwillekeurig” en „Och, zo maar willekeurig.” De eigenlijke betekenis is vervaagd.

Kan de spreektaal zich een dergelijke weelde veroorloven, in de wiskundige taal is dat uit den boze. Wil men toch die woorden gebruiken, dan zou ’t beter zijn te spreken van: „In een onwillekeurige driehoek...” of „bewijs dat voor een onwillekeurig punt van de figuur geldt...” Beter lijkt me echter te spreken van „een algemeen punt”, zoals reeds vaker is voorgesteld, maar nog te weinig ingang gevonden heeft. Wel moet dan ook de uitdrukking „algemeen” gedefinieerd worden als volgt:

Een punt heet algemeen in een puntenreeks indien de eigenschap, waaraan de punten dier reeks voldoen, voor het gekozen punt wordt bewezen op een manier, die voor alle punten dier reeks analoog verloopt.

Men zou misschien nog beter van een representant kunnen spreken. ’t Min of meer ondoordachte gebruik van het woord „willekeurig” heeft ons al vaak parten gespeeld. Dit brengt me als vanzelf op wat ’k zou willen noemen: De misleidende invloed van de getekende figuur.

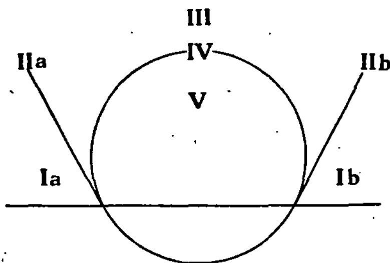
't Delen door nul is wel de mathematische zondeval genoemd, zó erg is 't met het gebruik van de figuur niet gesteld. 't Is er mee als met het gebruik van sterke drank. Matig gebruik kan in staat stellen tot verhoogde prestaties, te veel evenwel werkt ruïneus. De mens moet de figuur hanteren, niet omgekeerd. Onachtzaamheid op dit punt wordt vaak gestraft, maar gelukkig (in zekeren zin helaas!) volgt niet steeds de straf op de zonde. B.v. De stelling: „De deellijn van een hoek is de m.p. der punten binnen de hoek gelegen, die gelijke afstanden hebben tot de benen van die hoek" is onjuist voor een hoek van 180°. Deze veelgemaakte fout moet op rekening van de misleidende functie van de figuur geschoven worden.

Koordenvierhoek.

Indien de som van twee overstaande hoeken van een vierhoek 180° is, is die vierhoek een koordenvierhoek.

Het indirecte bewijs hiervan wordt door sommige leerboeken, ongestraft, onvolledig gegeven.

A, B en C liggen niet op één lijn, er gaat dus een cirkel door. D en B [1]) liggen aan verschillende kant van AC, daar inspringende hoeken niet worden beschouwd. Men zegt dan: D ligt binnen de cirkel, op de cirkel of er buiten, alles gerekend aan die kant van AC waar B niet ligt. Met een punt te kiezen uit elk dezer gebieden wordt dan verder volstaan. Echter is niet elk punt representatief voor 't volledige gebied in den zin als door ons gedefinieerd. We krijgen daar ∠ D scherp is: zie fig.



Evenzo bij de raaklijnenvierhoek.

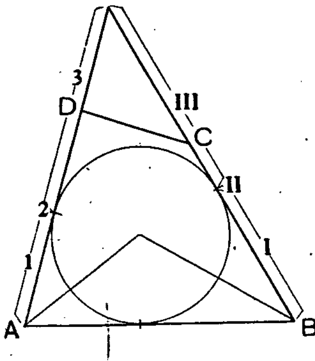
Indien bij een vierhoek de sommen der overstaande zijden gelijk zijn, is die vierhoek een raaklijnenvierhoek.

Is de vierhoek geen parallelogram, dan is hij steeds deel van een driehoek. Zij de basis van die driehoek AB, dan zullen de bisectrices van de hoeken A en B elkaar binnen de driehoek snijden. Dit punt is middelpunt van de cirkel, die AB, BC (of verlengde) en AD (of verlengde) raakt. Dat nu ook CD aan deze cirkel raken moet, volgt uit beschouwing van de diverse mogelijkheden.

Is de vierhoek een par., dan hebben we een ruit, dus raakl.vierhoek.

---

[1]) Neem B stomp, dan is D scherp; was B recht, dan ook D en is het midden van AC even ver van A, B, C, D verwijderd.



1 I	2 I	3 I
1 II	2 II	3 II
1 III	2 III	3 III

Afzonderlijke behandeling vereisen de gevallen

1 I, 2 II, 3 III, 1 II 1 III 2 III

O.a. teneinde de misleidende invloed van een getekende figuur zoveel mogelijk te neutraliseren, verdient een discussie aanbeveling.

Als voorbeeld kiezen we een onderwerp uit de B.M.: De snijlijn te bepalen van twee vlakken α en β. We krijgen:

1	α // H	Idem β	I
2	α // V		II
3.	α // as en snijdt H, dus ook V		III
4	α door de as		IV
5	α snijdt de as		V

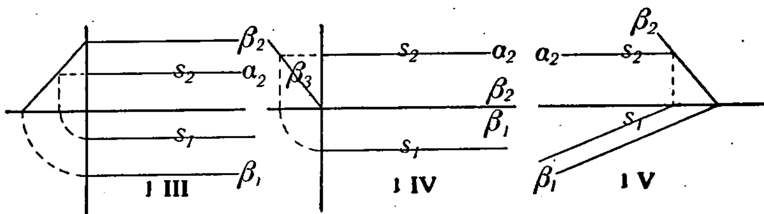
De volgende combinaties doen zich nu voor:

1 I	2 I	3 I	4 I	5 I
1 II	2 II	3 II	4 II	5 II
1 III	2 III	3 III	4 III	5 III
1 IV	2 IV	3 IV	4 IV	5 IV
1 V	2 V	3 V	4 V	5 V

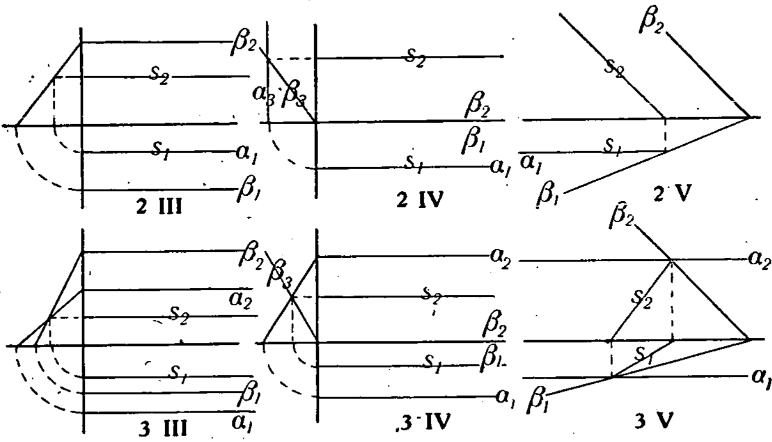
De gevallen in de diagonaal en daaronder dienen afzonderlijk onderzocht te worden; die boven de diagonaal gaan door letterverwisseling van α en β over in die onder de diagonaal.

1 I geen snijlijn

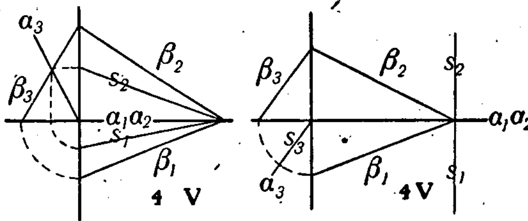
1 II $\alpha_2 \equiv s_2$ en $\beta_1 \equiv s_1$

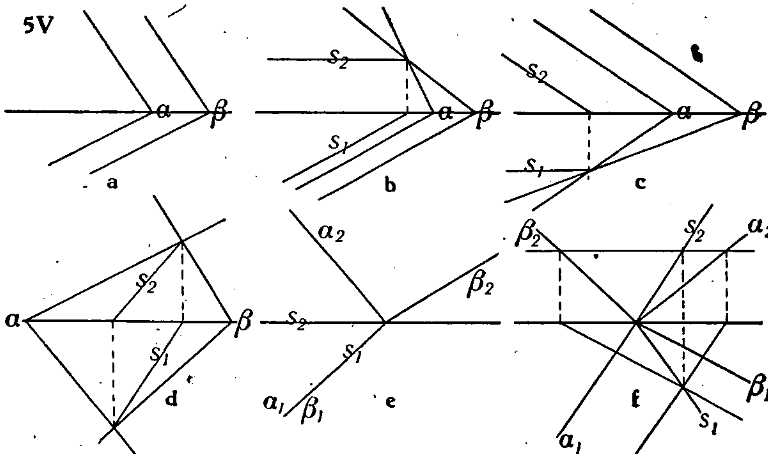


2 II geen snijlijn



Is $\alpha_3 \,//\, \beta_3$ dan geen snijlijn.
4 IV $s \equiv$ as.





Verder kan dan nog gewezen worden op moeilijkheden die ontstaan door het te klein zijn van het papier.

Bij allerlei doorsnede-constructies en netwerken geven we ons ook, op gezag van de getekende figuur, gaarne over aan de illusie dat we „het" vraagstuk hebben opgelost. Bv. Construeer de hoeken van een drievlakshoek als de zijden gegeven zijn. Neem die zijden alle drie stomp, dan geeft dat al minder aangename ervaringen. Of: construeer de overige elementen van een drievlakshoek als gegeven zijn een zijde met de beide aanliggende hoeken als één dier hoeken 90° is.

Of: teken in een ruimtefiguur van een vierzijdige pyramide de doorsnede van het vlak, waarvan drie punten gegeven zijn. Wie kent niet de moeilijkheden die ontstaan enkel door de ligging der gegeven punten te varieren.

Ieder van U is in staat legio voorbeelden te bedenken van vraagstukken waarbij het slechts schijn is dat we „het" hebben opgelost. De éénmaal getekende ruimtefiguur tracht ons dit vaak wijs te maken. Soms lukt dat ook goed, soms ook laten we ons graag bewust door haar in slaap sussen.

Hoe dan ook, in elk geval is de waarschuwing „Wacht U voor de getekende figuur" niet overbodig.

Algebra.

Over het delen door nul heeft Dr. Joh. Wansink[1]) een samenvattend en verhelderend artikel geschreven; hij vraagt in § 6 van zijn beschouwing: Is met deze uiteenzetting het definitieve standpunt aangegeven dat men ten aanzien van de deling door nul moet innemen? Hij antwoordt: Naar mijn mening: ja. Ik daarentegen heb een sterke neiging om „neen" te antwoorden. Die ontkenning is gegrond op 't door hem zo juist geformuleerde uitgangspunt: De deling $a : b$ met $b = 0$ blijft ongedefinieerd.

Aan dit uitgangspunt nu dienen we consequent vast te houden. Nemen we een der daar gegeven voorbeelden:

$$\frac{x^2}{x+4} = \frac{16}{x+4} - 8.$$

Allereerste opmerking: Blijkbaar is $x \neq -4$.

Een leerling mag toch van de steller van een opgave verwachten dat hij geen „onzin" neerschrijft, in ieder geval weigert een gedisciplineerde leerling te gaan exerceeren met iets dat „zinloos" is. 't Doet altijd eigenaardig aan te zien dat men op „zinloze" dingen

1) Euclides Jg. 11, No. 5, blz. 226.

bewerkingen toepast en dan aan 't slot tot de ontdekking komt dat men iets „onzinnigs" gekregen heeft.

De vraag die W. stelt in § 3: Waar zitten in de gegeven voorbeelden de gemaakte fouten? beantwoord ik dus zonder uitzondering met: direct in den aanvang.

Heeft men de m.i. enig juiste opmerking aan 't begin gemaakt: $x \neq -4$, dan doet 't er in wezen niet veel toe of men beide leden met $x + 4$ vermenigvuldigt dan wel eerst de breuken samenvoegt, de gevonden breuken vereenvoudigt enz. Voor de practische uitvoering is de laatste methode gewenst. 't Bezwaar dat men loopt als men met het K.G.V. der noemers vermenigvuldigt, nl. dat de graad der vergelijking nodeloos hoog kan worden, is trouwens gemakkelijk op te heffen. Men merkt op dat de oorspronkelijke en de nieuwe vergelijking gelijkwaardig zijn behalve in het geval dat -4 een wortel van de 2e verg. zou blijken te zijn. Men onderzoekt dat (begrip wortel!); zo ja, dan dele men het linkerlid van de op nul herleide verg. door $x + 4$. De verg. wordt dan:

$$(x + 4)\ f(x) = 0 \therefore \text{ daar } x + 4 \neq 0 \text{ dat } f(x) = 0.$$

Mocht ook $f(-4) = 0$ blijken, dan nogmaals dezelfde bewerking. Hierbij is dus gebruik gemaakt van de stelling: Is a een wortel van $f(x) = 0$ waarbij $f(x)$ een gehele rationele veelterm is, dan is de verg. te schrijven in de vorm $(x - a)\ \varphi(x) = 0$. 't Bewijs hiervan kan gemakkelijk gegeven worden voor alle gevallen die zich bij dit soort vraagstukken voordoen. Dat $x^n - a^n$ deelbaar is door $x - a$ voor elke gehele positieve n is niet strikt nodig.

Hoewel dus het vermenigvuldigen met het K.G.V. der noemers geen principiële bezwaren heeft, blijft 't aanbeveling verdienen er op te wijzen dat men zich gewoonlijk al die moeilijkheden besparen kan door breuken samen te voegen, te vereenvoudigen enz., kortom door goed uit te kijken. 't Wringen in allerlei bochten is geheel verdwenen alleen door consequent vast te houden aan 't onloochenbare feit: „$a : b$ is zinloos voor $b = 0$".

'n Ander geval.

De afspraak omtrent de éénwaardigheid van vierkantswortels, die noodzakelijk is om practisch met wortels te kunnen rekenen, heeft soms verrassende gevolgen. De vergelijking $\sqrt{x^2} = x$ is noch vals, noch identiek, noch gewoon. Immers voor positieve waarden van x is zij identiek en voor negatieve vals. 'n Soort amphibische [1]) vergelijking dus.

'n Laatste algebraïsche voorbeeld.

---

[1]) Semi-identiek? Zie art. Schogt in Eucl. Jg. 10, No. 1, blz. 50, i.h.b. blz. 60.

De herleiding van $\sqrt{a + b\sqrt{c}}$ wordt in de leerboeken soms fout, soms (bewust of onbewust) onvolledig weergegeven.

Fout is het om de stelling: „Uit $a + \sqrt{b} = c + \sqrt{d}$ volgt, onder bepaalde voorwaarden, $a = c$ en $b = d$" weer te geven in de volgende bewoordingen: „als twee tweetermen, ieder bestaande uit een meetbaar en een onmeetbaar deel, aan elkander gelijk zijn, dan moeten de meetbare delen en ook de onmeetbare delen gelijk zijn".

Niet correct is het om bij die stelling als voorwaarden te geven: *a, b, c, d* rationaal, $\sqrt{b}$ *en* $\sqrt{d}$ irrationaal. Immers uit het irrationaal zijn òf van $\sqrt{b}$ òf van $\sqrt{d}$ volgt het irrationaal zijn van de ander. Dit bezwaar klemt te meer als men later bij de bekende herleiding zich niet meer bekommert om de eis van het irrationaal zijn van *beide* wortelvormen. Is men van mening dat aan het herleiden van deze vormen wat al te veel aandacht wordt besteed, dan kan men zich op het standpunt stellen reeds tevreden te zijn met het eisen van voldoende voorwaarden. Voor de gelijkheid van

$$\sqrt{a + b\sqrt{c}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

is voldoende $x + y = a$ $2\sqrt{xy} = b\sqrt{c}$. Merken we dan nog op dat steeds $(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy$ dan is hiermede de hele zaak afgedaan, al blijft 't waar dat we alleen kunnen constateren: Is $a^2 - b^2c$ geen volkomen kwadraat, dan lukt de herleiding *langs deze weg* niet. Stelt men zich hiermee niet tevreden, dan moeten we aantonen dat de genoemde voorwaarden ook „nodig" zijn en zijn dan verplicht de reeds eerder genoemde stelling te bewijzen, maar dan ook correct.

Meetkundige plaats.

Uit didactische overwegingen verdient 't m.i. geen aanbeveling om te definiëren: „Een m.p. is de *verzameling* van punten, rechten, vlakken die een zekere eigenschap hebben en wel om de volgende redenen:

1°. Omdat 't begrip verzameling niet nader gedefiniëerd wordt en het dus een onbekend begrip (m.p.) definiëert door een eveneens onbekend begrip (verzameling). 'k Zag dan ook in een leerboek: de *volledige* verzameling, wat, als pleonasme, zeker niet fraai is, maar blijkbaar geboren is uit een vaag gevoel van schuldbewustzijn bij den schrijver.

2°. De definitie zegt zo weinig. We willen toch werken met figuren die identiek zijn met die verzamelingen en pas wanneer we een figuur genoemd hebben beginnen we houvast te krijgen en is er iets beweerd. 't Is toch ook niet de bedoeling om bv. te spreken over de m.p. der punten die gelijke afstanden hebben tot vijf vlakken, een lege verzameling nl. ed.

3⁰. De practijk leert mij dat velen blijk geven geen begrip te hebben van m.p., mede veroorzaakt door 't feit dat hen een nietszeggende definitie is meegegeven. De m.i. meest gewenste definitie luidt: Een m.p. van punten (rechten of vlakken) is een figuur, waarvan de punten (rechten of vlakken) een zekere eigenschap hebben, terwijl ook omgekeerd de punten (rechten of vlakken) met die eigenschap tot de figuur behoren.

Niet: „Een m.p. is een figuur..., gevormd door..." De uitdrukking „gevormd door" wordt vaak niet nader bepaald. Definiëren we: Een vlak wordt gevormd door rechte lijnen met een bepaalde eigenschap, indien door elk punt van dat vlak minstens één zo'n lijn gaat, dan is het duidelijk, dat, bij de laatstgenoemde definitie van m.p. de volgende m.p. een vlak is, terwijl zij bij de eerstgenoemde definitie een waaier of evenwijdige stralenbundel is. De bedoelde m.p. is: „De m.p. van de lijnen die een gegeven lijn snijden en evenwijdig zijn met een lijn van andere richting is..."

Houden we ons aan de eerstgenoemde bepaling van m.p. dan is er volledige overeenstemming tussen planimetrie en stereometrie. We bewijzen dan steeds:

a. Een punt (rechte, vlak) van de figuur voldoet.

b. Een punt (rechte, vlak) dat voldoet, behoort tot de figuur.

Wel is 't noodzakelijk ook op de logische omkeringen te wijzen en deze telkens weer onder de loupe te nemen en te herhalen, doch om 't vast in 't geheugen te doen prenten houden we vast aan de eisen *a* en *b,* die ook in de definitie van m.p. zijn opgenomen.

Tot zover de voorbeelden uit onze dagelijkse practijk.

Wat ik alleen heb willen betogen is dit. Dagelijks betrappen we ons er op incorrecte dingen te doen, slordig te zijn in gedachten, in woorden en in daden en wat nog erger is: heel vaak zijn we ons er niet van bewust. Dat alles stemt de leraar deemoedig en maakt tevens mede de vreugde van zijn vak uit. 't Klinkt vreemd om blij te zijn om 't zien van eigen tekortkomingen en toch is 't zó. Trouwens is 't hier anders dan in 't gewone leven? Maakt niet wat dwaas is voor de een, voor de ander juist zijn grootste vreugde uit?

Als derde en laatste eis noemde ik U: de leraar is zich bewust dienaar te zijn. Hierover nog een enkel woord.

Wanneer hij gelooft en daarbij deemoedig is, dan zijn de voorwaarden geschapen waarop hij ook dienaar kan zijn.

Zolang een leraar doceert zonder in de ogen van zijn toehoorders te zien, kan hij zich koning voelen, in zekere zin heer en meester over 't slagveld. Neemt hij evenwel de moeite zijn gehoor in „ogenschouw" te nemen, dan komt het moment dat hij dienaar wordt. Hij

moet weer opnieuw beginnen, 't anders zeggen, zich tot de een neerbuigen, de andere aan 't handje meevoeren om tenslotte te bemerken dat een derde in de modder is blijven steken. Hij zal moe worden, zich ergeren misschien, boos worden, leelijke woorden zeggen of nog erger, echter, indien hij zich op 't juiste moment herinnert dat hij gelooft en zich de redenen van zijn deemoedshouding voor den geest haalt, dàn en dàn alleen zal hij dienaar zijn en willen zijn. Hij weet dan dat hij nuttig werk doet zelfs met de achtergeblevene uit de modder te trekken, hij weet dat hij voor zijn leerlingen van grote waarde is, hij weet dat hij nuttig is voor de maatschappij, als geheel. Veel geopperde bezwaren zullen van hem afglijden. Indien hij doet wat hij kan, zich geeft voor wat hij waard is, dan behoeft hij zich niet neer te laten drukken door „de algemene ontevredenheid die er heerst over het M.O. en V.H.O.". Hij constateert dan met genoegen dat veel van zijn oud-leerlingen nuttige leden van de Maatschappij zijn geworden, dat ook het H.O. in staat geweest is binnen zeer redelijke tijd die oud-leerlingen tot Dr, Mr, Ir of Arts te promoveren en hij stelt dan met een gevoel van innige dankbaarheid vast dat zijn werk toch goede vruchten heeft voortgebracht.

In dit verband lijkt 't me niet ondienstig om, speciaal met het oog op de klachten die af en toe van 't H.O. tot ons komen, een onderzoek in te doen stellen over het volgende. Van een respectabel aantal mensen, waarvan men algemeen aanneemt dat zij geslaagd zijn in de maatschappij wordt nagegaan hun schoollevensloop vanaf de lagere school tot en met het eind van de Academie, hun rapporten, overgang, enz. Misschien dat op die wijze enige betrouwbare conclusies zouden kunnen worden getrokken. De meeste klachten zijn vaak te incidenteel of te subjectief of hebben slechts betrekking op enkele gevallen.

'k Weet niet of 't U gaat als mij. Hoe meer ervaring ik krijg, hoe huiveriger ik ben om te beslissen dat deze of gene niet mee kan. De meest wonderlijke ervaringen zijn mijn deel. De psychologie en psychotechniek kunnen, in kundige handen, waarschijnlijk nu en in de toekomst enige meerdere zekerheid verschaffen, al blijft ook hier voorzichtigheid geboden. De menselijke persoonlijkheid is zó gecompliceerd, dat voorspellingen steeds een gewaagd karakter behouden.

We leven weer in een tijd, waarin van alle kanten geroepen wordt om vernieuwing, niet in 't minst om vernieuwing van ons onderwijs. Wat daaruit tenslotte groeien zal, valt nog moeilijk te voorspellen. Persoonlijk lijkt 't me gewenst om serieus te bestuderen de mogelijk-

heid en wenselijkheid de leerlingen per vak te bevorderen. Overijld mag hier zeker niet te werk worden gegaan. Noch is de mogelijkheid in ons onderwijssysteem daartoe direct te zien, noch ook is de wenselijkheid van voldoende zijden belicht om tot invoering daarvan te kunnen overgaan. Ernstige overweging verdient echter zeer de aandacht. Wat evenwel ons onderwijs vóór alles nodig heeft is rust, die bevorderd wordt door simpele dingen als: een schoolgebouw dat in orde is, goede leermiddelen, boeken, schriften, pennen, potloden, verwarmde lokalen enz. enz. Dàt zijn in de eerste plaats de zaken die het dringendst om voorziening vragen. Is dat eenmaal in orde, dan mag, na rijp beraad, de vernieuwing komen. Hoe die er dan ook uit zal zien, voor de wiskundeleraar staat dit vast: In elk systeem zal goed wiskunde-onderwijs onontbeerlijk zijn. Immers, dit leent zich bij uitstek tot het voor ieder denkend mens noodzakelijk aankweken van de gewoonte om zichzelf steeds weer de fundamentele vragen te stellen: Hoe? Waarom? Wat betekent dit? Wat zeg ik feitelijk? Zeg ik wel, wat ik bedoel? Waarop is mijn mening gegrond?

Geen vak wat zich van nature zó leent tot het aanleren van die gewoonte dan juist de wiskunde.

Op die mening is ook voornamelijk het geloof in zijn vak van den wiskundeleraar gebaseerd. Dàt voelt een leerling als juist; als we steeds weer blijven hameren op: „zeggen wat je bedoelt". Lukt 't eindelijk na veel mislukte pogingen, dan lichten de ogen op; dàt zijn de momenten waarop de leraar zijn dank oogst. Die dank komt niet van ouders die verheugd zijn met het einddiploma van zoon of dochter, noch van autoriteiten die de les gewaardeerd hebben, neen, de leraar oogst zijn dank en vindt zijn bestaansrecht in de lichtende ogen van zijn leerlingen, die hem zeggen: ja, nu ben ik er achter en 'k vind 't fijn dat 'k 't nu snap. Zó is de leraar een vreugde-brenger.

Dr Dijksterhuis [1]) heeft eens de leraren onderscheiden in drie groepen:

de naief-enthousiasten,

de pessimisten en

de niet-naieven, de meest begaafden, die, de betrekkelijkheid volledig ziende, toch enthousiast blijven.

Deze indeling is zinvol, zoals van die zijde niet anders te verwachten is.

De derde groep omvat uit den aard der zaak slechts een klein

---

1) Euclides Jg. 14, No. 2/3, blz. 99.

percentage van 't aantal in functie zijnde leraren, terwijl 'k meen dat ook de tweede groep niet zeer talrijk zal zijn. 't Grootste aantal zal en moge steeds geleverd worden door de eerste groep, die der naief-enthousiasten. Zonder een zekere mate van naieveteit geen zelfvertrouwen en zonder zelfvertrouwen geen enthousiasme, dat overslaat op ons gehoor en dat het lesgeven maakt tot een vaak weerkerend feest.

Geloof, deemoed en dienstvaardigheid zullen de wiskunde-leraar doen zijn en blijven de onmisbare reisgids voor de jeugd van nu en van alle tijden.

DE ZEKERHEID DER MEETKUNDE. [1]

door

DR. J. HAANTJES.

„Nadien onder alle dingen, welcke van Godt den schepper der gantsche werelt, door sijne onbegrijpelijcke wijsheyt en goedheyt, op d'aarde zijn voortgebracht, niet treffelijckers bevonden werdt dan de Ziele ofte het redelijck vernuft des menschen: soo behooren wij dan ons uyterste best te doen, dat wij dit Goddelijck deel tot ondersoekingh der waerheyt, aen welckers kennis alle desselfs volmaektheit hanght, geduerigh gewennen en oeffenen.

Onder alle oeffeningen nu des verstants, dewelcke hier toe konnen dienen, en werden gheene soo vorderlyck gevonden als de Mathematische ofte Wiskonstige Oeffeningen, alsoo genaemt, om dat deselve alle andere in klaere kennis en wisheyt te boven gaen en overtreffen. Want somen overweegt, dat de uytterlijcke sinnen, die ons veeltijts bedriegen, in dese oeffeningen geen plaets en hebben, maer 't verstandt alleen met die besigh is, en hoe datse van seer bekende dingen haer beginsel nemende ons in korten tot kennis van gantsch verborgene saecken komen te brengen en also 't verstandt van d' aerde gelijck als in den Hemel voeren; soo is lichtelijk te besluijten, om wat reden d' Oude de Tel- en Meetkonst niet t' onrecht voor alle andre weetenschappen en konsten te oeffenen oorboir geacht hebbe"

aldus schreef de Leidsche hoogleeraar Franciscus van Schooten omstreeks 1650 in een voorrede van zijn boek met Mathematische Oeffeningen. Uit deze woorden moge in de eerste plaats zijn groote vereering voor de wiskunde blijken, doch ook spreekt dit citaat ons van een zekere opvatting over het wezen der wiskunde en de taak van den mathematicus. Het door het verstand, het met behulp van logische redeneeringen, afleiden van stellingen uit enkele zeer bekende feiten, die men zonder meer voor waar en zeker houdt. Tegenwoordig zal niet iedereen deze zienswijze zoo zonder meer deelen, ook al mocht zijn liefde voor het vak die van genoemden hoogleeraar evenaren. De opvattingen betreffende het fundament der wiskunde en de zekerheid harer uitspraken hebben sindsdien aanmerkelijke veranderingen ondergaan en het verschil van inzicht, dat men op dit gebied aantreft,

[1]) Rede, uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van hoogleeraar in de Wiskunde aan de Vrije Universiteit te Amsterdam op Donderdag 4 October 1945.

is eerder toe- dan afgenomen. Dit verschil in inzicht is zelfs zoo groot, dat waar in den regel aangaande technische kwesties in de wiskunde overeenstemming heerscht, de oneenigheid regel schijnt te zijn in kwesties betreffende de grondslagen. De „klaere kennis en wisheyt", die volgens van Schooten de wiskunde kenmerkt, schijnt hier geheel zoek te zijn.

Het is U bekend, dat in de wiskunde steeds weer nieuwe stellingen uit oude worden afgeleid. Meerdere malen heeft men de vraag kunnen hooren: „Komt hier nooit een eind aan?", waarschijnlijk gesteld uit bezorgdheid voor het lot, dat den beoefenaars in dit geval zou wachten. Deze echter hebben deze bezorgdheid niet gedeeld, doch daarentegen steeds weer belangstelling gehad, niet voor een eventueel einde, maar juist voor het begin, de grondstellingen en voor de regels, de methoden, die in de wiskundige redeneeringen worden toegepast, kortom voor de bron van de zekerheid der wiskundige uitspraken. Hun belangstelling ging steeds weer uit naar de pijlers, waarop het geheele gebouw rust, want welke waarde zal dit hebben als enkele of slechts één van deze pijlers ondeugdelijk blijken. Maar, zult U zich afvragen, bestaat die mogelijkheid dan, hangt dit werkelijk den wiskundige als een dreiging boven 't hoofd? Deze kwesties raken het wezen der wiskunde. Het gaat hier om de vraag wat wiskunde is. In het volgende willen we eenige opvatingen hieromtrent wat nader beschouwen, waarbij wij ons in hoofdzaak tot de meetkunde zullen beperken.

Over de vraag wat meetkunde is, heerschte vroeger meer eenstemmigheid, dan in de laatste eeuw wel het geval is geweest. Men was het er over eens, dat de meetkunde, waarbij steeds de driedimensionale Euclidische meetkunde bedoeld werd, de wetenschap is, die de figuren van de ruimte tot object heeft. Dat wil niet zeggen, dat men zijn kennis door het opmeten van figuren vergaarde, integendeel, want zooals van Schooten het uitdrukte: „de uytterlijcke sinnen zullen ons veeltijds bedriegen". Reeds de Grieken gevoelden de behoefte de stellingen van de meetkunde door logische redeneeringen af te leiden uit enkele zeer eenvoudige feiten, axioma's genoemd, die op hun beurt aan de ervaring waren ontleend. Natuurlijk was men zich wel bewust, dat de uitspraken van de meetkunde slechts bij benadering realiseerbaar waren, doch door de groote mate van nauwkeurigheid gaat men allengs in deze uitspraken meer zien dan empirische waarheden.

In de theorie, die Kant over het probleem der meetkunde ontwikkelt, worden de uitspraken der meetkunde dan ook als exacte

waarheden gezien. Volgens Kant toch zouden de grondeigenschappen van de meetkunde, in casu de axioma's van Euclides, ons onmiddellijk intuitief duidelijk zijn en zouden zij hun oorsprong hebben in den menschelijken geest. Deze aprioriteitsopvatting van de ruimte is niet in strijd met de zooeven genoemde doelstelling van de meetkunde. Pas door dit aanwezige begrip ruimte kunnen de ervaringen ons bewust worden. Bijgevolg zal ook vóor de ervaringswereld de Euclidische meetkunde gelden. De opvatting van Kant weet zich langen tijd te handhaven, totdat het vertrouwen in zijn standpunt een gevoelige schok krijgt door de ontdekking van de niet-Euclidische meetkunde.

Wij zagen reeds, dat de uitspraken der meetkunde door logische redeneeringen uit eenige axioma's werden verkregen. Het spreekt vanzelf, dat men van deze axioma's — dus van de feiten, die men zonder bewijs aanvaardt — verlangt, dat ze zeer eenvoudige en zeer bekende dingen uitdrukken, dat het die uitspraken van de meetkunde zijn, die het minst om een bewijs vragen. Nu is er onder de axioma's en postulaten van Euclides één, die aan deze weliswaar vage eisch minder goed voldoet. Dit z.g. parallelenpostulaat, geformuleerd voor het platte vlak, komt hierop neer, dat men uit een punt buiten een rechte één en slechts één lijn kan trekken, die de eerstgenoemde niet snijdt. Reeds onder de oudste uitleggers van de geschriften van Euclides treffen wij er aan, die van meening zijn, dat dit postulaat uit zichzelf niet evident genoeg is om als axioma te worden gebezigd. Vele wiskundigen hebben dan ook getracht dit postulaat te bewijzen uitgaande van de overige axioma's van Euclides. Een van de methoden hiertoe was uit te gaan van de veronderstelling, dat door een punt meerdere lijnen mogelijk zijn, die met een gegeven rechte in een plat vlak liggen en deze rechte niet snijden. Men hoopte dan, dat deze veronderstelling in combinatie met de overige axioma's van Euclides tot een contradictie zou voeren. Het resultaat was echter geheel anders dan de verwachting. Contradicties deden zich niet voor en het lukte op deze wijze aan Lobatschewsky, Bolyai en Gauss onafhankelijk van elkaar een complete meetkunde op te bouwen, een z.g. niet-Euclidische meetkunde. Bij deze meetkunde blijft het niet. Aan Riemann zijn wij het ontstaan verschuldigd van een tweede niet-Euclidische meetkunde, waarin evenwijdige lijnen in 't geheel niet voorkomen. In deze meetkunde hebben twee in een plat vlak gelegen rechten steeds één snijpunt. Het verrassende is wel, dat er meerdere geometrieën naast elkaar blijken te kunnen bestaan.

Deze groote ontdekking uit het begin van de 19e eeuw heeft een radicale wijziging gebracht in de opvatting over de meetkunde. Het standpunt van Kant weet zich op den duur moeilijk te handhaven, vooral wanneer later blijkt, dat voor het beschrijven van sommige ervaringen de Euclidische ruimte niet de meest geschikte is. De vraag doet zich nu voor, welke beteekenis dan wel aan de uitspraken van de meetkunde moet worden toegekend. Aangezien de drie geometrieën, waarover men nu beschikt, op drie verschillende stelsels axioma's berusten, ligt het voor de hand, dat men zich gaat bezinnen op de beteekenis van een axioma. Tevoren was een axioma een uitspraak, waarvan de geldigheid vanzelf sprak. Maar twee elkaar uitsluitende axioma's kunnen niet beide vanzelf spreken. De vraag naar de zekerheid in de meetkunde wordt opnieuw aan de orde gesteld, want hoe kan men oogenschijnlijk elkaar uitsluitende meetkunden fundeeren op dezelfde ervaring of dezelfde intuitie?

De gewijzigde houding, die dan ook ontstaat ten opzichte van de meetkunde, hangt ten nauwste samen met de axiomatische methode, die vooral door Hilbert ver is doorgevoerd. In het kort komt deze methode hierop neer. Wij denken ons drie verschillende systemen van dingen, die wij punten, lijnen en vlakken noemen. Volgens Hilbert behoeven wij ons van deze dingen geen voorstelling te maken. Bovendien denken wij ons zekere betrekkingen tusschen deze objecten, die wij kunnen aanduiden met woorden als „liggen op", „tusschen", „parallel" enz. of ook met symbolen, wat het voordeel heeft, dat daardoor de storende invloed van de taal gemakkelijker vermeden wordt. De preciese omschrijvingen van deze relaties zijn de axioma's der meetkunde. Uit deze axioma's worden nu de stellingen van de meetkunde afgeleid met als eenig hulpmiddel de logische redeneering.

In tegenstelling met de oudere opvattingen behoeft men zich bij de keuze van de axioma's niet meer te laten leiden door feiten uit de ervaringswereld, doch wij zijn in deze keuze betrekkelijk vrij. Er worden slechts enkele eischen aan gesteld. Hilbert eischt van zijn axioma's in de eerste plaats, dat ze niet strijdig zijn en in de tweede plaats, dat ze onderling onafhankelijk zijn, waarbij de eerste eisch essentieel is. Het systeem wordt als waardeloos beschouwd, als aan dezen eisch van niet-strijdigheid niet voldaan is, d.w.z. indien het mogelijk is uit de axioma's zoowel het juist als het niet-juist zijn van een uitspraak valt af te leiden. De meetkundige ziet zich nu gesteld tegenover het probleem te bewijzen, dat de door hem gekozen axioma's inderdaad niet tot

een contradictie kunnen voeren, een probleem, dat de Kantiaan in 't geheel niet kent, daar voor hem de strijdigheid van de grondstellingen der (Euclidische) meetkunde gewoon ondenkbaar is. Nu moet de zekerheid der meetkunde bewezen worden door het geven van een niet-strijdigheidsbewijs. Deze vraag naar de niet-strijdigheid treedt in de wiskunde voor 't eerst op na de ontdekking van de niet-Euclidische meetkunde. Hoe weet men, dat de axioma's van deze meetkunde of zelfs van de Euclidische meetkunde vrij zijn van tegenspraken? Het is niet voldoende er op te wijzen, dat zich nog geen contradicties hebben voorgedaan, ze mogen niet voor kunnen komen.

Omstreeks 1870 ontdekte Klein, dat het mogelijk is van de niet-Euclidische meetkunde een Euclidisch model te maken. Hiermede wordt bedoeld, dat het mogelijk is aan elk begrip en elke relatie uit de niet-Euclidische meetkunde volgens een bepaald voorschrift een begrip en een relatie uit de Euclidische meetkunde toe te voegen en wel zoodanig, dat de niet-Euclidische axioma's correspondeeren met bepaalde Euclidische stellingen. Met elke bewerking en elk bewijs in de niet-Euclidische meetkunde komt overeen een bewerking en een bewijs gebaseerd op de Euclidische axioma's. Indien nu de niet-Euclidische meetkunde strijdig zou zijn, volgt hier onmiddellijk uit, dat hetzelfde van de Euclidische gezegd zou moeten worden. Omgekeerd kan men echter ook in de niet-Euclidische meetkunde een model van de Euclidische construeeren. Aan elk der meetkunden komt derhalve dezelfde orde van zekerheid toe. Het zijn niet elkaar uitsluitende, doch elkaar omvattende meetkunden.

Door deze beschouwing moge het vertrouwen in de niet-Euclidische meetkunde zijn toegenomen, de gestelde vraag is er mede niet definitief beantwoord. Er blijf nog aan te toonen, dat één van de meetkunden, b.v. de Euclidische meetkunde, vrij is van tegenspraken. Voor dit probleem neemt men veelal zijn toevlucht tot de analyse en de algebra. Het verband tusschen meetkunde eenerzijds en algebra en analyse anderzijds vindt ge toegepast en uitgewerkt in de analytische meetkunde. Hierin wordt, als wij ons tot het platte vlak bepalen, een punt voorgesteld door een getallenpaar (x, y), een lijn door een lineaire vergelijking in x en y, enz. Elke meetkundige stelling komt nu overeen met een algebraïsche, zoo is b.v. het axioma, dat uitspreekt, dat twee verschillende punten één rechte bepalen, de in meetkundige taal geformuleerde algebraïsche stelling, die luidt, dat een stelsel van twee lineaire en homogene vergelijkingen met drie onbekenden, waarvan de

coëfficientenmatrix de rang twee heeft, steeds één oplossing heeft. Zoals Hilbert opmerkt wordt de geheele Euclidische meetkunde op deze wijze in de leer van de reëele getallen verwezenlijkt. En hieruit concludeert hij terecht, dat een contradictie zich in de Euclidische meetkunde niet kan voordoen, als de leer der reëele getallen vrij is van tegenspraak. Moeten wij echter daarom in de leer der reëele getallen het logische fundament zien van de verschillende meetkunden? Sommigen zijn deze opvatting toegedaan op grond van de zoo juist vermelde beschouwingen. Toch is deze gevolgtrekking niet juist. De meetkunde kan weliswaar teruggebracht worden tot de analyse en de algebra, doch het omgekeerde is niet minder het geval. Elke bewerking met reëele getallen correspondeert met bepaalde constructies in de meetkunde. Wat deze correspondentie aantoont is dan ook alleen, dat de orde van zekerheid in de meetkunde dezelfde is als die in de analyse. Meetkunde en de leer der reëele getallen zijn twee verschillende modellen van hetzelfde abstracte systeem. Zij kan ons geen antwoord geven op de vraag of men in de leer der reëele getallen het logische fundament moet zien voor de meetkunde of wel andersom de meetkunde kan beschouwen als fundament van de leer der reëele getallen. Sommigen hellen zelfs over naar het laatste, omdat naar hun meening de meetkunde primair is en het begrip reëel getal uit de meetkunde is voortgekomen Hierbij doet men dan vaak een beroep op Dedekind, een der grondleggers van de theorie van het irrationale getal. In zijn werk „Stetigkeit und irrationale Zahlen" merkt deze namelijk op: „Indien men al de eigenschappen van de rechte lijn rekenkundig wil vertalen, zijn de rationale getallen niet toereikend; het is noodig het reeds door het rationale getal gecreëerde instrument te voltooien, door nog andere getallen in te voeren. zoodat het gebied der getallen dezelfde continuïteit krijgt als de rechte lijn". Hieruit zou dan blijken, dat het oorspronkelijke begrip niet is het reëele getal, doch juist het willekeurig punt van een segment, dus het meetkundig begrip. Hoe juist deze beschouwingen ook mogen zijn, ze leeren ons niets betreffende de logische afhankelijkheid van de beschouwde begrippen. Immers de manier, waarop de verschillende mathematische begrippen in den loop der tijden uit elkaar zijn ontstaan, heeft niet noodzakelijk iets te maken met hun logische afhankelijkheid.

Doch laat ons terugkeeren tot de vraag betreffende de tegenspraakloosheid van het meetkundig systeem. Zijn wij er zeker van dat de leer der reëele getallen, waarin wij ons meetkundig stelsel hebben afgebeeld, vrij is van tegenspraken? Men heeft wel ge-

meend, dat het mogelijk was de leer der reëele getallen te baseeren op het systeem der natuurlijke getallen. Gesteld dat deze opvatting juist zou zijn, dan zou men de natuurlijke getallen kunnen beschouwen als fundament van de geheele wiskunde, inclusief de meetkunde en zou alleen overblijven de vraag naar den grond voor de zekerheid der rekenkunde.

Op verschillende wijze is getracht op deze vraag een antwoord te geven. Zoo heeft men geprobeerd de rekenkunde op de logica te grondvesten. Zou een dergelijke poging, o.a. ondernomen door Frege en Russell, geslaagd zijn, dan zou dit beteekenen, dat de wiskunde als een deel van de logica beschouwd moet worden, voorzoover ze tenminste op de natuurlijke getallen is gefundeerd. Zij zou dus geen ander fundament hebben dan de logica en dus als 't ware logisch uit het niet zijn voortgekomen. Behalve van hen, die deze consequentie te ver ging, rezen er eenige ernstige bezwaren tegen de opvatting van Frege door de ontdekking van eenige paradoxen. De eerste, die Frege er op attent maakt, dat zijn leer tot een paradox aanleiding kan geven, was Russell. Deze laat het hier echter niet bij. Hij laat ook zien, hoe men deze antinomieën kan vermijden, namelijk door wat voorzichtiger te zijn met het begrip verzameling. Maar het wantrouwen tegen de logische redeneeringen is eenmaal gewekt en laat zich niet zoo gemakkelijk bezweren. De zekerheid, dat er in zijn leer geen paradoxen kunnen optreden, kan Russell ook niet geven. Poincaré zegt hiervan: „Hebben wij misschien door de omheining, die wij rondom de schapen van de leer der verzamelingen opgetrokken hebben, ook niet ongemerkt den wolf mee ingesloten?"

Zoo wint steeds meer de meening veld, dat de wiskunde niet tot de logica teruggebracht kan worden, ja dat men voor den opbouw van logische systemen de wiskunde niet geheel kan ontberen. In de wiskunde wordt echter weer gebruik gemaakt van logische redeneeringen, zoodat een afzonderlijke opbouw niet meer in aanmerking komt. Getracht wordt daarom logica en wiskunde gemeenschappelijk te grondvesten.

De methode, die men hierbij volgt, is de reeds genoemde axiomatische methode, nu echter voor het geheel van wiskunde en logica. Wij maakten reeds de opmerking, dat de axioma's in de wiskunde volgens de opvatting van Hilbert en zijn school relaties zijn tusschen begrippen, aan welke geen andere inhoud toekomt dan die door genoemde relaties er aan toegekend wordt. Men gebruikt dan ook bij voorkeur een begripschrift. Dit zelfde

wordt nu voor de logica gedaan. Men laat de beteekenis van de logische begrippen varen; de in de logica ingevoerde teekens zijn symbolen zonder inhoud. Tusschen deze symbolen zullen echter eenige relaties, de axioma's van de logica gelden. De zoo geformaliseerde wiskunde kan men beschouwen als een spel. Een bewering is een bepaalde configuratie van teekens. Ze is bewijsbaar, als ze met behulp van de spelregels uit den beginstand is af te leiden. Het kernprobleem is nu ook weer aan te toonen, dat in het op deze wijze opgbouwde systeem geen enkele tegenspraak zal kunnen voorkomen, d.w.z. dat het onmogelijk is, dat twee elkaar volgens de spelregels uitsluitende beweringen beide bewijsbaar blijken te zijn. Met systemen, die geen elkaar uitsluitende beweringen kennen, waarvoor dit probleem dus niet bestaat, schijnt men zich niet te willen bemoeien.

Is de oplossing van dit probleem gelukt? Zoo zonder meer kan op deze vraag geen antwoord gegeven worden, aangezien deze niet goed gesteld is. Het komt er namelijk op aan, welke overleggingen bij het bewijs toelaatbaar geacht worden. Het zou voor de hand liggen zich te beperken tot die, welke in het beschouwde systeem formuleerbaar zijn, doch Gödel heeft bewezen, dat onder deze beperking een bewijs onmogelijk is. Er zullen in een bewijs van de tegenspraakloosheid steeds overleggingen gebruikt moeten worden, die in het beschouwde stelsel niet geformuleerd kunnen worden.

Bij Hilbert treedt daarom naast de geformaliseerde wiskunde een andere wiskunde op, een metawiskunde, die gebruikt wordt ter fundeering van de eerstgenoemde. De objecten, waarmede de metawiskunde zich bezig houdt, zijn de bewijzen in de geformaliseerde wiskunde. Haar uitspraken zijn oordeelen over de reeds genoemde spelregels en teekenconfiguraties. In deze metawiskunde laat Hilbert redeneeringen toe, die steunen op de aanschouwing, dit in tegenstelling met de zuiver mechanische rekenregels van de eigenlijke wiskunde. Op deze wijze is het Hilbert en zijn medewerkers gelukt van verschillende systemen de tegenspraakloosheid te bewijzen.

Heeft Hilbert nu het doel bereikt, wat hij zich voorgesteld heeft, namelijk, zooals hij het uitdrukt, niets minder dan de algemeene twijfel aan de zekerheid der wiskundige redeneeringen uit de wereld te bannen? Wij betwijfelen het. In zijn metawiskunde gebruikt hij redeneeringen uit de klassieke wiskunde, zij het ook met groote beperkingen, maar de twijfel betreft juist de zekerheid van de uitspraken van deze wiskunde. Een bewijs der niet-strijdig-

heid kan slechts de juistheid van bepaalde redeneeringen tot de juistheid van andere meer vertrouwen genietende redeneeringen terugvoeren. De moeilijkheden verdwijnen niet, ze worden verplaatst. De pogingen van Hilbert hebben echter zeer verhelderend gewerkt. Het gaat er in de metawiskunde vaak om met hoe veel of liever gezegd hoe weinig aanschouwing men het gestelde doel kan bereiken. Dit werk vindt ook buiten den kring der *formalisten* groote waardeering. Het heeft niet alleen beteekenis voor hen, die den formeelen opbouw van de wiskunde als noodzakelijk zien, doch ook voor hen, die de formeele beschouwing alleen maar nuttig of wenschelijk vinden en voor wie de axiomatiek niet als grondslag voor de wiskunde dient.

Keeren wij thans tot de meetkunde terug. Wij hebben bij het probleem van de grondslagen der rekenkunde zoo lang stil gestaan naar aanleiding van de vraag naar de zekerheid in de meetkunde. Gebleken is, dat dit probleem niet zonder hulp van buiten kan worden opgelost. Het onderzoek naar de niet-strijdigheid voert daarom niet tot de overtuiging dat de meetkunde haar fundament noodzakelijk moet vinden in de leer der reëele getallen. Het heeft ons zelfs niet tot het inzicht gebracht, dat de mogelijkheid de axioma's van de meetkunde terug te brengen tot die van de analyse aan de uitspraken van de meetkunde een hoogere graad van juistheid geeft.

Maar waaraan ontleent de meetkunde dan wel haar zekerheid? Voor de eerste beoefenaars van de meetkunde was het experiment, de ervaring, de bron der zekerheid voor haar uitspraken; voor den Kantiaan zetelde de oorsprong van de meetkunde in den menschelijken geest, in de intuitie van ruimte en tijd, waardoor aan de uitspraken der meetkunde een absolute waarde toekomt. Pogingen de logica als fundament der wiskunde te zien brachten geen bevredigende oplossing. Hoe nu? Terug naar de opvatting van Kant of naar een zeker empirisme? Inderdaad, men vindt beide opvattingen in gewijzigden vorm terug. Volgens sommigen heeft de bestudeering van de wereld rondom ons de wiskunde en de logica voortgebracht. De fundamenteele begrippen van al de takken van de wiskunde, zooals punt, lijn, vlak, geheel getal, optellen, enz. zouden aan de ervaring zijn ontleend, waarbij sommigen met ervaring alleen datgene op het oog hebben, wat door waarneming van de physische wereld tot ons komt, anderen echter ook een zekere ervaring uit het gebied van het denken, een mentale ervaring, niet willen uitsluiten. Ook kan geen wiskunde beoefend worden zonder schema's en figuren, dus zonder beroep op concrete voor-

stellingen. Bij voortduring heeft nu de wiskunde haar bestaan te rechtvaardigen door experimenteele verificatie van de voorspellingen, waartoe zij komt. Wat hier voor de wiskunde in 't algemeen gezegd is, geldt natuurlijk ook in 't bijzonder voor de meetkunde, waaronder men bij deze opvatting dat gedeelte van de wiskunde zou kunnen verstaan, dat handelt over die objecten, die correspondeeren met figuren in de physische ruimte.

Wij maakten ook reeds kennis met de strooming, waarbij de mathematische begrippen als vrije scheppingen van den menschelijken geest worden beschouwd en geen banden met de aanschouwing of iets van dien aard worden erkend. Wanneer men zich op dit formalistisch standpunt stelt, kan een afzondering van een bepaald gedeelte van de wiskunde onder den naam meetkunde alleen dan worden aanvaard, als deze gedefinieerd wordt met behulp van de axioma's van de beschouwde stelsels alleen en niet met behulp van iets buiten deze stelsels gelegen. Hij zou bijvoorbeeld de wiskunde kunnen verdeelen in de wiskunde van het aftelbare en de wiskunde van het niet-aftelbare en voor deze laatste den naam meetkunde bezigen. Of hij zou onder meetkunde kunnen verstaan de wiskunde van de objecten punt, rechte, vlak, enz. met zekere onderlinge relaties, die tot de bekende meetkundige stelsels kunnen voeren. Doch waarom zou hij dit doen, daar niets den formalist verhindert andere relaties voorop te stellen, die het karakter van de begrippen punt, rechte, enz. geheel veranderen. Juist dit geheel vrij zijn in de keuze van de de objecten definieerende relaties geeft een afzondering van een bepaald gedeelte van de wiskunde onder den naam meetkunde iets onwezenlijks.

Een geheel ander aspect krijgt deze zaak weer, als men er van uitgaat, dat de gebezigde grondbegrippen gebonden zijn aan onze intuitie, waardoor ze voor den denkenden geest onmiddellijk duidelijk zijn, een standpunt, dat veel verwantschap toont met de opvatting van K a n t. Aan de wiskundige relaties komt dan wel terdege een zin toe. Men vindt deze meening reeds bij P o i n c a r é. Als deze, handelende over de grondslagen der meetkunde, het begrip punt invoert, tracht hij aan te toonen hoe het mogelijk is, dat wij dit begrip kennen. Hij geeft hiervoor een psychologische verklaring.

Over de vraag, welke begrippen men als onmiddellijk duidelijk mag aanvaarden, kan men natuurlijk nog van meening verschillen. Zij, die het intuitieve ruimtebegrip erkennen, zullen tot de meetkunde die mathematische stelsels rekenen, waarin de begrippen en relaties zijn ontleend aan deze ruimte-intuitie. In de literatuur vindt men steeds weer pogingen het gebied van de meetkunde door

een definitie nauwkeurig aan te geven. Deze geven echter veelal ofwel een omschrijving van wat als doel van de meetkunde gezien wordt, ofwel een nadere aanduiding van de methode, die men zou moeten volgen om tot dat doel te geraken, b.v. de uitspraak van Klein, die de meetkunde kenschetst als de invariantentheorie van een transformatiegroep. Het behoeft geen betoog, dat dergelijke aanduidingen sterk afhankelijk zijn van de ontwikkeling der wiskunde. Steeds weer gaat men tot andere omschrijvingen over, als de oudere niet langer voldoen. Deze onbestendigheid heeft Veblen en Whitehead tot de uitspraak gebracht, dat een bepaalde tak van de wiskunde meetkunde wordt genoemd, omdat een voldoend aantal competente menschen haar deze naam geeft op grond van gevoel en traditie.

Wat toch is het geval? Bij deze indeelingen laat men zich voor het meerendeel leiden door de al of niet bruikbaarheid van het beschouwde wiskundige stelsel voor de beschrijving van verplaatsingen, bewegingen enz. in de physische ervaringswereld. Dat deel van de wiskunde, wat men voor dit doel gebruikt of gebruiken kan, is men gewoon meetkunde te noemen en heeft men getracht te omschrijven. Bij deze indeeling wordt derhalve gelet op datgene, wat de wiskunde aan de wereld der aanschouwing heeft *aan te bieden* in tegenstelling met de zooeven genoemde omschrijving, die berust op datgene, wat de wiskunde aan de intuitie, dus aan de aanschouwing in ruimen zin heeft *ontleend*. De ruimte-intuitie schenkt ons niet één, doch verschillende meetkundige stelsels. Welke van deze systemen gebruikt worden voor het tot uitdrukking brengen van de physische wetten in de ervaringswereld is een kwestie van smaak, gemak en ook van gewoonte.

Welke begrippen en relaties zijn het nu, die aan het intuitief ruimtebegrip worden ontleend? Het zullen de meest fundamenteele axioma's van de meetkunde zijn en als zoodanig kan men de axioma's van het continuum beschouwen. De meetkundigen gaan bij hun onderzoekingen in den regel uit van een topologische ruimte, nl. een continuum. Zoo definieert bijvoorbeeld Lie eerst de ruimte als een „Zahlenmannigfaltigkeit", d.w.z. een verzameling van punten, die voorstelbaar zijn door een aantal getallen, de coördinaten van het punt genoemd. Het topologische karakter van deze ruimte wordt dan gewaarborgd doordat Lie een bepaalde meetkunde verder definieert door een *continue* transformatiegroep, de bewegingsgroep. De axioma's van de meetkunde vallen op deze wijze uiteen in twee groepen. Bij de axioma's van het continuum komen nog die van de beweging. Deze laatste zijn echter ook

topologisch invariant, d.w.z. men kan ze topologisch karakteriseeren. De axioma's van de Euclidische meetkunde zijn niet gebonden aan een star model van rechte en vlak. Deformeert men een model van een Euclidische ruimte op continue wijze, dan blijft ze Euclidisch, mits men dan maar de gedeformeerde rechten rechten blijft noemen en de gedeformeerde vlakken weer vlakken noemt. Wat zijn onze schetsen bij de meetkunde anders dan topologische afbeeldingen?

De axioma's van het continuum, aan welke men op grond hiervan een centrale plaats toekent, zijn de ordeningsaxioma's en de axioma's van de continuiteit. Voor het eendimensionale continuum bijvoorbeeld definieeren de eerstgenoemde axioma's de begrippen „liggen tusschen" en orientatie, terwijl het axioma van de continuiteit ons in het bezit stelt van het begrip limiet, van het begrip meetkundig punt. Deze begrippen en relaties zouden ons nu door het intuitieve ruimtebegrip, of als U wilt door de tijdsintuitie, gegeven zijn en zich ook niet door iets anders laten fundeeren. Op deze intuitie berust dus niet alleen de omschrijving van de meetkunde, zij is ook de bron voor de zekerheid van haar uitspraken.

De axioma's van het continuum kunnen daarbij niet als eenige pijler van de wiskunde beschouwd worden, zelfs niet van de meetkunde. Als tweede pijler wordt hieraan toegevoegd de rij der natuurlijke getallen, die eveneens beschouwd wordt ons door intuitie gegeven te zijn. Tezamen dragen zij de geheele wiskunde, zoowel de leer van de geheele getallen, de rekenkunde, als die van het continuum, de meetkunde. De mathematische begrippen hebben volgens deze opvatting een tweeledige afkomst. Een deel groepeert zich rondom het geheele getal, de overige rondom het continuum.

Tegen de opvatting, dat het geometrische continuum door intuitie onmiddellijk gegeven is, wordt door sommigen het bezwaar ingebracht, dat het physische continuum, b.v. het kleurenspectrum een structuur heeft, die in wezen geheel verschilt met die van het mathematische continuum, daar men niet van afzonderlijke kleuren in het spectrum kan spreken, terwijl wel van afzonderlijke punten van het mathematisch continuum gesproken wordt, alsof dit uit afzonderlijke punten was opgebouwd. Hiertegenover kan echter opgemerkt worden, dat men intuitie niet met experiment mag vereenzelvigen.

Doch dit is niet het eenige bezwaar gebleken. Van verschillende kanten is op de zoo juist geschetste beschouwingswijze critiek uitgeoefend, niet het minst van de zijde van de aanhangers eener

intuitionistische opvatting van de wiskunde. De genoemde opvatting wordt namelijk in 't geheel niet gedeeld door die wiskundigen, die men *intuitionisten* pleegt te noemen, onder wie onze landgenooten Brouwer en Heyting een vooraanstaande plaats innemen. Volgens hun opvatting is de wiskunde identiek met het exacte deel van ons denken. Ze berust op geen enkele andere wetenschap, ook niet op de philosophie of de logica. Stellingen uit deze wetenschappen als bewijsmiddel te gebruiken in de wiskunde heeft geen zin, daar reeds voor de formuleering van deze stellingen mathematische begripsvormingen noodig zijn. Er blijft voor de wiskunde geen andere bron over dan de intuitie, die ons de toelaatbare begrippen als zonder meer duidelijk voor oogen stelt. Datgene wat constructief uit deze intuitie is af te leiden vormt de wiskunde. In tegenstelling met de zooeven geschetste opvatting zou deze intuitie zich echter beperken tot de rij der natuurlijke getallen en omvat ze niet het continuum. De geheele wiskunde bestaat volgens de intuitionisten uit het constructief bezig zijn met de rij der natuurlijke getallen. De leer van het continuum, zooals de klassieke wiskunde die kent, heeft daarom geen recht op den naam wiskunde. Wel is het Brouwer gelukt op constructieve wijze een soort continuum op te bouwen, wat zeer veel met het klassieke continuum gemeen heeft.

De gevolgen van deze grondgedachten zijn voor de wiskunde van ingrijpenden aard. Ze vereischen een geheel nieuwe opbouw. Voor den intuitionist bestaat er ook in 't geheel geen afzonderlijke meetkunde, hij ontkent elke onafhankelijke existentie van de meetkunde. Een axiomatische meetkunde, die uitgaat van begrippen als punt, rechte en vlak met zekere relaties daartusschen, zooals Hilbert die ontwikkeld heeft, blijft zonder zin en inhoud, zoolang hiervan niet een analytisch model kan worden aangegeven. Want alleen aan de analytische meetkunde, voor zoover deze op de rekenkunde berust, komt een wiskundige beteekenis toe. Gaat men de ontwikkeling van de meetkunde na, dan heeft ze dus volgens deze opvatting wel erg lang in een voor-mathematisch stadium verkeerd. Is het te verwonderen, dat het velen moeilijk valt aan deze ideeën zulke groote deelen van hun bouwwerk op te offeren? Bijna alle wiskundigen zijn het er wel over eens, dat er gegronde redenen bestaan de klassieke bewijsvoeringen en begripsvormingen in de wiskunde op bepaalde punten te wantrouwen, doch niet iedereen is genegen de scheidslijn tusschen toelaatbare en niet toelaatbare begrippen en conclusies juist daar te trekken, waar de intuitionist hem legt.

Zoo zien wij dan, dat er allerminst eenheid heerscht omtrent de opvattingen over de meetkunde en de bron van haar zekerheid. Zullen wij eenmaal ook op dit gebied een eenheid zien, die wij in de meer technische kwesties van de wiskunde gewend zijn aan te treffen? Waarschijnlijk niet. De problemen hebben een geheel ander karakter. Menige kwestie is van wijsgeerigen aard. Doch dit zal de wiskundige niet weerhouden zich met de vraag naar de zekerheid harer uitspraken bezig te houden, niet alleen uit een drang naar waarheid, doch ook omdat de ontwikkeling van de wiskunde met de problemen van de grondslagen in nauw verband staat.

HET OPTREDEN VAN COORDINATEN IN DE MEETKUNDE *)

door

DR. G. H. A. GROSHEIDE F.WZN.

In een beschrijving van de persoon en het leven van den genialen negentiende eeuwschen meetkundige Jacob Steiner merkt Professor Hendrik de Vries op: „Zijn noodlot was het niet weg te doezelen feit, dat de Meetkunde, behandeld met zuiver synthetische methoden, ook al worden deze in werking gesteld door een genie van bijna onbeperkte kracht (wat Steiner wás), in laatste instantie tòch niet opgewassen blijkt tegen de Analyse en de hulp van deze niet geheel kan ontberen" [1]).

Twee dingen trekken in deze uitspraak de aandacht. Eenerzijds de zeer eenzijdige begaafdheid van een geometer van het formaat van Jacob Steiner, die de idee wekt, dat de synthetische methode meer in overeenstemming is met het wezen der meetkunde dan de analytische. Anderzijds het verheffen der Analyse waardoor de synthetische methode juist als minder vruchtbaar wordt gequalificeerd.

Wij staan hier voor een merkwaardigheid, die den grondslag vormt van hetgeen, waarover ik heden tot U wil spreken, n.l. *het bestaan van twee verschillende methoden in de meetkunde,* de synthetische en de analytische. Deze twee methoden worden in het vervolg steeds onderscheiden als de synthetische en de algebraische, om aan te duiden dat geen problemen uit de differentiaalmeetkunde aan de orde worden gesteld. De schakel tusschen beide vormen de *coördinaten* en wanneer zulks niet het bezwaar had, dat het uitschakelen der differentiaalmeetkunde daarin niet tot uitdrukking komt, zou het onderwerp, waarvoor Uw belangstelling wordt gevraagd vrij nauwkeurig worden gekarakteriseerd door: *het optreden van coördinaten in de meetkunde.*

Werpen wij een blik in de historie, dan zien wij, dat wel is waar de naam „coördinaat" eerst in 1692 door Leibniz werd gebezigd, maar dat het principe om de plaats van een punt door eenige ge-

---

*) Rede gehouden bij de aanvaarding van het ambt van Hoogleeraar aan de Vrije Universiteit te Amsterdam, op 28 September 1945.

tallen vast te leggen van veel ouderen datum is. Algemeen bekend zijn bijvoorbeeld de „rechte klimming" en de „declinatie" van een ster, die op zijn laatst in de eerste tijden van de Academie te Alexandrie zijn ingevoerd. Wanneer men derhalve als geboortejaar van de coördinatenmeetkunde aanneemt 1637, het jaar, waarin „La Géométrie" van Descartes verscheen, is dit niet, omdat in dit werk voor het eerst het begrip coördinaat voorkomt.

Neen, de beteekenis van Descartes is, zooals Dr Dijksterhuis ergens uiteenzet, geweest, dat hij de „geometrische analyse" der Grieken overbracht uit de taal der oppervlakterekening in die der symbolische algebra. Daarbij gingen de „symptomen" waardoor de Grieken ellips, hyperbool en parabool kenmerkten, over in de algebraische uitdrukkingen die wij sedert dien als de vergelijkingen dezer krommen kennen [2]).

De verdiensten van het werk van Descartes zijn hiermede evenwel niet alle opgesomd. Veel meer toch dan Fermat, wiens in 1629 geschreven korte verhandeling „Ad locos planos et solidos isagoge" eerst vijftig jaar later te Parijs werd gepubliceerd, maakte hij zich verder los van de Grieken en slaagde er zoo in met zijn methode ook hoogere graads krommen te behandelen. Hiermede werd inderdaad een zeer belangrijke stap gedaan, want voor Descartes was een coördinaat een lijnstuk en niet de lengte daarvan [2]). In het eerste stadium der ontwikkeling is het zuiver synthetische volkomen primair en onderstelt de invoering van coördinaten een zeker gedeelte der euclidische meetkunde.

Vóór men zich kon bedienen van hetgeen men noemde de „Analyse van Descartes" waren allerlei andere krommen dan de kegelsneden langs synthetischen weg bestudeerd en wel uitgaande van hun definities als meetkundige plaatsen. Daarnà stond men dus voor de taak aan al deze meetkundig gegeven krommen vergelijkingen toe te voegen en hun reeds bekende eigenschappen uit te drukken door algebraische betrekkingen, terwijl voorts het gebruik van coördinaten de mogelijkheid bood verdere bijzonderheden op te sporen en zelfs nieuwe krommen in te voeren door middel van een bepalende algebraische vergelijking. Het gedeelte der Wiskunde, dat zoo ontstond, schijnt in het eind der achttiende eeuw in Frankrijk langzamerhand den, hoewel minder fraaien, thans nog gebruikelijken naam „analytische meetkunde" verkregen te hebben. Althans een in 1802 verschenen werk van Biot draagt den titel: „Essai de géométrie analytique".

De voordeelen, die de algebraische methode voor het onderzoek der vlakke krommen bezit boven de synthetische spruiten vooral

voort uit het werken met vergelijkingen met onbepaalde coëfficienten, waardoor dikwijls de noodzakelijkheid eenige gevallen te onderscheiden wordt weggenomen. Hiernaast kan men zich voor het behandelen van bijzondere gevallen bedienen van geschikt bij de krommen aansluitende coördinatenstelsels, anders gezegd van „kanonische" of „standaardvergelijkingen", zooals de middelpuntsvergelijking van den cirkel en de topvergelijking van de parabool.

Doch niet alleen in het kiezen van een passend *cartesiaansch* coördinatenstelsel heeft men een hulpmiddel om meer ingewikkelde opgaven te vereenvoudigen. Daarnaast staat ter beschikking het overgaan op andere niet-rechtlijnige coördinaten, zooals de in 1691 door Jacob Bernoulli geconstrueerde poolcoördinaten of de bipolaire coördinaten. Het essentieele in een stelsel vlakke puntcoördinaten is immers, dat twee zóódanige scharen van ∞' krommen gegeven zijn, dat door elk punt van het vlak of van het beschouwde gedeelte daarvan één kromme van elke schaar gaat [3]), en het is geenszins vereischt, dat deze scharen beide bundels evenwijdige rechten zijn. Veelal zullen echter bij niet-cartesiaansche coördinatenstelsels uitzonderingspunten optreden, men denke aan de pool bij de poolcoördinaten, waarvoor de voerhoek onbepaald is. Of ook zal het voorkomen, dat een tweetal waarden van de coördinaten niet steeds ondubbelzinnig een enkel punt bepaalt, zooals bij de bipolaire coördinaten. Beperken wij ons niet tot de planimetrie, maar wenden wij ons bij voorbeeld tot de studie van de krommen op algebraische oppervlakken in de ruimte, dan geldt voor de daarbij gebruikte „kromlijnige coördinaten van Gauss" al het juist opgemerkte in vollen omvang.

De werkwijze in de eerste eeuwen na het ontstaan der analytische meetkunde kon, hoewel zeer vruchtbaar en daarom nog heden ten dage gevolgd, op den duur niet voldoen. Bij de invoering van de coördinaten en het opstellen van de vergelijkingen der rechten en krommen steunde men op diverse stellingen betreffende evenwijdigheid, gelijk- en gelijkvormigheid en daarna toonde men met behulp van deze gevonden coördinaten en vergelijkingen opnieuw eigenschappen omtrent gelijkheid van hoeken en lijnstukken aan. Tot tegenstrijdigheden kon dit proces wel is waar niet leiden, omdat de algebra geen andere rol vervulde dan hulpmiddel binnen het kader der synthetische meetkunde, maar uit systematisch oogpunt waren natuurlijk bezwaren hiertegen aanwezig.

De kringloop dien men beschreef, doordat men zich halverwege niet realiseerde, wat het uitgangspunt was geweest, wees ondertusschen zelf een weg aan om uit de moeilijkheden te geraken: t.w. primair

stellen der algebra. Daartoe werd men ook van andere zijde geleid. Het punt met coördinaten (x_0, y_0) verkreeg langzamerhand de aanduiding: „het punt (x_0, y_0)" en de kromme bepaald door de vergelijking $f(x, y) = 0$ heette geleidelijk aan: „de kromme $f(x, y) = 0$". De idee, dat een coördinaat een lijnstuk was ging verloren en omdat een vergelijking derhalve niet meer een betrekking tusschen lijnstukken was, veranderde de naam van de kromme, die ze definieerde, van „ligne géométrique" (meetkundige plaats) in „algebraische kromme".

De *arithmetiseering der meetkunde,* die daarmede haar intrede had gedaan was volkomen, toen men de niet bevredigende door Euclides gegeven definitie van het punt ging vervangen door de bepaling: „Een punt *is* een greep van eenige getallen" en ook uitsprak „Een rechte *is* een vergelijking van den eersten graad". Zoodoende was de coördinatenmeetkunde tot een hoofdstuk der algebra verheven [22]).

Ook al stemt men niet voor de volle honderd procent in met den jubel, dat door deze nieuwe wijze van behandelen de meetkunde pas tot een ware wetenschap is geworden, toch kan men oog hebben voor de groote verdiensten dezer vernieuwingen in de fundeering.

Ten eerste voeren ze als het ware vanzelf tot het betrekken van objecten in meer dan drie dimensies binnen het veld van onderzoek. Zeer zeker bestaat een uitgebreide meerdimensionale synthetische meetkunde en zelfs is een vierdimensionale beschrijvende meetkunde uitgewerkt, maar op algebraisch standpunt komt men vlotter tot resultaten en is men veelvuldiger in staat te rekenen in ruimten met een onbepaald aantal van n dimensies en zoo eigenschappen voor alle dimensies gelijktijdig op te sporen.

In de tweede plaats geschiedt de uitbreiding van het euclidische vlak met complexe en oneigenlijke elementen veel ongedwongener. Wanneer men door middel van een elliptische involutie synthetisch een paar toegevoegd complexe punten definieert en er daarna in slaagt volgens de aanwijzingen van Von Staudt deze twee punten van elkander te scheiden, blijft men wel zeer ver verwijderd van het oorspronkelijke begrip punt.

Iets dichterbij kan men blijven bij de invoering van het oneigenlijke punt. Doch hoe bezwaarlijk daartoe op synthetische gronden is te besluiten blijkt wel hieruit, dat, terwijl reeds Kepler en Desargues in de zeventiende eeuw het denkbeeld van oneindig verre punten bezaten, eerst Poncelet in 1814 tot de conceptie van het projectieve vlak geraakte. Vergelijkt men ten overvloede den weg, dien men moet afleggen om axiomatisch zuiver de oneigenlijke

punten, rechten en vlakken in te voeren, met de snelle wijze, waarop men dit bereikt via de homogene rechtlijnige coördinaten, dan is een zekere voorkeur zeer verklaarbaar.

Wij gaan aan het definieeren van het projectieve vlak onafhankelijk van het euclidische voorloopig voorbij en beperken ons er toe aan het ontstaan van andere vormen van meetkunden te herinneren. Slechts merken wij op, dat Felix Klein in 1872 constateerde, dat iedere toen bekende meetkunde moest zijn op te vatten als invariantentheorie voor een bepaalde transformatiegroep. In het bijzonder correspondeerde met de analytische meetkunde de projectieve groep en hare ondergroepen.

Voor de meetkundigen werd de opgave nu de volgende: Zij moesten beginnen met het opsporen van algebraische invarianten en eindigen met het meetkundig interpreteeren daarvan. Wat de vervulling van het eerste gedeelte dezer taak betreft, deze deed stuiten op vormen van steeds grooteren omvang, die voortdurend bezwaarlijker eliminaties veroorzaakten. Vooral door twee vondsten werd hierin uitkomst geboden of beter gezegd werd het gebied, waarbinnen de operaties uitvoerbaar blijven, belangrijk uitgebreid.

De eerste was het symbolische proces, waarbij de thans nog steeds in de algebraische invariantentheorie gebruikelijke notatie, afkomstig is van Aronhold en Clebsch, doch wezenlijk niet verschilt van een in 1846 door Cayley aangegeven voorstellingswijze [4]). Het grondprincipe bestaat hierin, dat de optredende vormen worden geschreven als symbolische producten van lineaire vormen, die weer op verschillende manieren verkort geschreven worden. Aansluitend bij Aronhold en Clebsch fundeerde Weitzenböck in 1908 de z.g. „complexsymbolen", waardoor ook problemen uit de lijnenmeetkunden en hare uitbreidingen met de symbolische methode konden worden behandeld.

De tweede stap in de richting van het verdrijven der moeilijkheden, die de noodzaak van eliminaties deed ontstaan bij het algebraisch oplossen van meetkundige problemen, was de verschijning van Schubert's „Kalkül der abzählenden Geometrie" in 1879. Deze rekenwijze berustte op de buitengewoon verrassende ontdekking, dat men voor vele vraagstukken den bouw der vergelijkingen van de betrokken objecten in het geheel niet behoeft te kennen, doch alleen den graad ervan noodig heeft [5]). Een zwakke plek had het werk van Schubert, waardoor het langen tijd in discrediet was, nl. de niet volledig verantwoorde toepassing van het z.g. „beginsel van het behoud van het aantal". Eerst door den arbeid van Van der Waerden in de jaren 1926 tot 1938 is deze zaak in orde gekomen.

Tragisch voor den synthetischen geometer is, dat het onderhavige beginsel een voortzetting is van, of althans nauwe verwantschap toont met het in 1820 door Poncelet geformuleerde „continuiteitsbeginsel", want Poncelet hoopte daarmede de meetkunde te bevrijden van de overheersching door de algebra sinds Descartes [6]). Daartegenover staat, dat de resultaten van Schubert, ondanks het feit, dat verscheidene nog langs geen anderen weg zijn geverifieerd, eenvoudig meetkundig te vertolken zijn. Dit is met de uitkomsten der invariantentheoretici niet zoo algemeen het geval: Het is dikwijls uitermate moeilijk of zelfs onmogelijk aan alle leden van een volledig systeem van invarianten, dat men heeft opgesteld een meetkundigen zin te verbinden. Voegt men hieraan toe, dat op streng arithmetisch standpunt vertrouwde begrippen, zooals de loodrechte stand van twee rechten, worden gedefinieerd door tusschenkomst van complexe punten, dan verwondert men er zich niet over, dat Hessenberg de thans beschreven analytische meetkunde rangschikt onder de rubriek „kunstmatige" of misschien moet ik zeggen geconstrueerde abstracte meetkunden.

Volgens Hessenberg dient men slechts dat gedeelte der meetkunde „coördinatenmeetkunde" te noemen, dat meetkundig aanschouwelijk gegeven objecten door getallen vastlegt. De zuiverste vorm ervan is aanwezig, indien deze getallen niet aan de spheer der rekenkunde ontleend, doch uit meetkundige betrekkingen afgeleid zijn [7]).

Dit oordeel brengt ons bij een volgende phase in de ontwikkeling: *de moderne axiomatische school,* waarvan Pasch de eerste, doch ongetwijfeld Hilbert de voornaamste grondvester is. Het woord „axioma" leidt de gedachten in synthetische richting, omdat het afkomstig is uit de commentaar van Proclus op de Elementen van Euclides [8]). En ongetwijfeld is het waar, dat bij Euclides tijdens het samenstellen van zijn standaardwerk het streven voorzat de axiomatische methode toe te passen. Een complete axiomatische opzet kenmerkt zich door twee dingen: 1. Een vooraf volledig opsommen van alle grondbegrippen, grondrelaties en zonder bewijs als juist aangenomen stellingen of axioma's; 2. Een terugvoeren van alle verder gebruikte begrippen tot de grondbegrippen en eén afleiden van alle overige stellingen door logische gevolgtrekkingen uit de axioma's [9]).

Vragen wij ons nu af, of de volgens hedendaagsche opvattingen opgebouwde planimetrie, bijvoorbeeld het door Hilbert geconstrueerde axiomastelsel, aan deze eischen voldoet, dan moet het antwoord daarop luiden: „tot op zekere hoogte". Immers elke meetkunde onderstelt de rekenkunde. Reeds ontmoet men arithmetische be-

grippen in haar eerste axioma's, die zeggen, dat elke rechte minstens twee punten bevat en dat er anderzijds minstens drie niet gerichte punten zijn. Maar ook op andere punten wordt de rekenkunde stilzwijgend aanvaard. Wanneer men wenscht te weten, of eenige stellingen, die men heeft geformuleerd, kunnen dienen als axioma's om mede daarop een meetkunde te fundeeren, moet men zich zekerheid verschaffen, dat men bij het maken van gevolgtrekkingen uit deze stellingen niet tot tegenstrijdigheden zal geraken. Dit nu geschiedt gewoonlijk in navolging van Peano door de axioma's te realiseeren in een „arithmetisch model". Hiervan wordt ook gebruik gemaakt om aan te toonen, dat geen der axioma's gemist kan worden, omdat het afhankelijk is van de overige, bij welk onderzoek andere vormen van coördinatenmeetkunden te voorschijn komen. Eveneens indien men den meer direkten weg bewandelt, dien Hilbert in zijn „Bewijstheorie" wees, stuit men tenslotte op de natuurlijke getallen en het principe der volledige inductie, zoodat men overal arithmetische begrippen en relaties bespeurt [9]) [10]).

Strikt genomen behooren dus in een planimetrische axiomatica diverse begrippen en axioma's der rekenkunde thuis. Deze treft men echter gewoonlijk niet aan, omdat de opstellers zich meestal beperken tot die begrippen en grondstellingen, die voor het speciaal beschouwde gebied karakteristiek zijn. Staan wij deze restrictie toe in hetgeen wij verlangen van een axiomatische fundeering, dan kan ook den opbouw der gearithmetiseerde meetkunde de eigenschap van axiomatische zuiverheid niet worden ontzegd, ook al onderstelt zij groote gedeelten der algebra.

Merkwaardig is nu, dat Hilbert in zijn beroemde „Grundlagen der Geometrie", waarvan de eerste druk in 1899 verscheen, alle axioma's van het stelsel der reëele getallen opsomt, doch eerst nadat hij de opstelling van zijn axioma's voor de driedimensionale euclidische meetkunde geheel heeft beeindigd [15]). Hilbert gaat nl. volkomen in den geest van de uitspraak van Hessenberg, die ik U reeds mededeelde, langs synthetischen weg over tot de invoering van coördinaten, waarbij vanzelf sprekend evenals oorspronkelijk bij Descartes, coördinaten weer lijnstukken op de assen worden en niet langer hun lengten. Om het doel (een coördinatenmeetkunde) te bereiken is het noodig met deze segmenten te kunnen rekenen en daarom ontwerpt Hilbert verder een „lijnstukrekening" aan de hand van de tevoren gememoreerde arithmetische axioma's.

Deze rekenwijze met lijnstukken bevat een essentieel element, dat men ook aantreft bij Descartes, wien het in staat stelde tot zijn vermelde bestudeering der krommen van hoogeren graad dan

2[2]). Dit is de ontdekking, dat men lijnstukken niet alleen kan optellen, doch, mits men een willekeurig lijnstuk kiest tot eenheidssegment *e*, eveneens kan vermenigvuldigen. Het product van de lijnstukken *a* en *b* wordt dan de vierde evenredige tot *e*, *a* en *b*.

Voor de aldus gedefinieerde meetkundige bewerkingen gelden dezelfde wetten als voor de gelijknamige operaties met reëele getallen. Zoo is de commutativiteit van de vermenigvuldiging aan te toonen op grond van de stelling van Pappus. Voorts zijn met behulp van de meetkundige ordeningsaxioma's de relaties grooter en kleiner voor segmenten in te voeren, alsmede de begrippen positieve en negatieve richting op een rechte.

Nog elders vindt de wezensovereenkomst tusschen de methoden van Descartes en Hilbert haar neerslag nl. in de algemeene vergelijking, die de lijnstukrekening voor de rechte levert:

$$bx - ay - bc = 0.$$

Deze heet volgens het tegenwoordige spraakgebruik „inhomogeen", omdat de derde term $-bc$ geen der onbekenden bevat. Op het standpunt der lijnstukrekening is zij echter „homogeen", daar elke term het product van twee segmenten is. Bij deze rekenwijze treden uitsluitend vergelijkingen op, die homogeen zijn in den laatsten zin des woords en het vaststellen van de homogeniteit eener uitkomst wordt als waarborg beschouwd voor de juistheid ervan.

Aan de gevonden bijzonderheid, die een speciaal geval is van den natuurkundigen regel, dat slechts grootheden van dezelfde dimensie opgeteld kunnen worden, wordt sinds de arithmetiseering van het coördinaatbegrip minder aandacht geschonken, hoewel de assenvergelijkingen der kegelsneden en de overal gebezigde vergelijking van het Folium van Descartes zeker aanleiding daartoe geven. Ter sprake komt zij bij de constructies met behulp van een „algebraische analyse", werkstukken, die men thans in Nederland gewoonlijk niet bespreekt bij de analytische meetkunde, doch voor zoover mogelijk behandelt in de planimetrie. Alleen wanneer het verband tusschen het gevraagde en de gegeven lijnstukken is uit te drukken door een homogene vergelijking is de constructie onafhankelijk van een gekozen eenheidssegment.

In de algebraische analyse ontmoeten wij een toepassing van de algebra op de meetkunde, die van ouderen datum is, dan de analytische meetkunde. Men zou zelfs met eenig recht kunnen volhouden, dat verschillende gedeelten van deze laatste niet anders zijn dan algebraische analyses. Zoo is het bepalen van de coördinaten der snijpunten van twee vlakke krommen op te vatten als het afleiden van algebraische uitdrukkingen voor bepaalde lijnstukken.

Aangezien ons historisch overzicht is gevorderd tot den tegenwoordigen tijd moeten wij nu aandacht schenken aan de *algebraische meetkunde,* want deze beleeft thans een periode van grooten bloei. Haar ontstaan dankt zij aan het samengroeien van de in Duitschland ver ontwikkelde theorie van de algebraische oppervlakken en krommen en van de meerdimensionale meetkunde der Italiaansche school, waartoe vooral de in 1925 overleden mathematicus Max Noether veel heeft bijgedragen [11]). Dit geeft reeds eenige aanwijzingen omtrent de onderwerpen, waarvan wij de bespreking in dezen nieuwen vorm van meetkunde zullen kunnen verwachten.

Bezien wij den inhoud nader, dan blijkt, dat de objecten, die worden bestudeerd, hetzij zelf zich bevinden in projectieve of affiene ruimten van een willekeurig aantal dimensies, hetzij omkeerbaar-ondubbelzinnig zijn af te beelden op objecten in dergelijke ruimten. Deze ruimten, die, omdat zij algebraisch worden gedefinieerd „getallenruimten" heeten, behoeven niet identiek gelijk te zijn aan die, welke wij bij het bespreken van de arithmetiseering der meetkunde verkregen. Ook is het puntbegrip aanzienlijk uitgebreid doordat men met behulp van coördinaten overging tot de invoering van het „punt in ruimeren zin" [11]).

Speciaal voorwerp van onderzoek zijn de „algebraische varieteiten", die beschreven worden als meetkundige plaatsen van alle punten (in ruimeren zin), waarvan de coördinaten voldoen aan een eindig of oneindig aantal algebraische vergelijkingen. Voorbeelden hiervan zijn de gewone krommen en oppervlakken en de hyperoppervlakken in meer dan drie dimensies, en eveneens de algebraische verwantschappen of correspondenties, die in de meervoudige projectieve ruimten een zelfde positie bekleeden als de eerstgenoemde objecten in de enkelvoudige [13]). Deze verwantschappen hebben door het werk der Italiaansche meetkundigen groote beteekenis verkregen voor de fundeering van de algebraische meetkunde. Men gebruikt het correspondentiebegrip bij het bewijzen van allerlei algemeene stellingen omtrent de doorsnijdingen van algebraische varieteiten, terwijl het „correspondentiebeginsel", dat Chasles in 1864 afleidde en zijn uitbreidingen naast het beginsel van het behoud van het aantal een tweeden hoeksteen vormen van Schubert's Meetkunde van het aantal, die thans als hoofdstuk der algebraische meetkunde fungeert.

Van de algebraische varieteiten worden in het bijzonder eigenschappen opgespoord, die bestand zijn tegen birationale transformaties. Kennen wij aan het begrip „transformatiegroep" een iets algemeenere beteekenis toe dan oorspronkelijk bij Felix Klein, dan wil

dat zeggen het opstellen van invarianten voor de groep der birationale transformaties. Wij laten in het midden of de taak der algebraische meetkunde daarmede volledig beschreven is en merken alleen op, dat de eigenschappen, die met deze invarianten corresponderen „inwendige" heeten, omdat zij onafhankelijk zijn van de ruimte, waarin de varieteit zich bevindt [12]).

In verband met het onderwerp, dat ons bezig houdt, moeten wij nu wijzen op een resultaat uit de algebraische meetkunde, dat door Chow tezamen met Van der Waerden werd gepubliceerd en wel omdat dit het gebied, waarin de coördinaten bruikbaar zijn ten zeerste heeft uitgebreid.

De gedachte, die aan de publicatie ten grondslag ligt, is niet nieuw. In zijn „Barycentrische Calcul" uit 1827 wijst Möbius op de groote symmetrie, die er bestaat tusschen de wijzen, waarop het punt en de rechte optreden in het projectieve vlak, hetgeen toont, dat hij als eerste een duidelijk inzicht had in het wezen van het „dualiteitsbeginsel", welks ontdekking tevoren een fellen prioriteitsstrijd tusschen Poncelet en Gergonne had veroorzaakt. Een volledig bewijs ervan werd gegeven door Plücker in het tweede deel van zijn „Analytisch-geometrische Entwicklungen", dat in 1831 verscheen en dat de geniale vondst wereldkundig maakte: de coëfficienten in de vergelijking van een rechte lijn als de coördinaten dezer rechte in te voeren [1]). De rechte was daarmede in de tweedimensionale analytische meetkunde tot een volkomen met het punt gelijkwaardig element geworden. Evenzoo bestond er driedimensionaa[illegible]dige aequivalentie tusschen punt en vlak als ruimte-elementen. Maar Plücker kwam verder en verschafte in 1868 door het ontwerpen der naar hem genoemde coördinaten aan de rechte een plaats als derde ruimte-element naast punt en vlak.

Bij de toevoeging van een coördinaatgreep aan een vast vlak sloot logisch aan de vorming van het begrip „loopende vlakcoördinaten", waardoor ook het punt werd voorzien van een vergelijking. Het onderscheid tusschen objecten, die door coördinaten en objecten, die door één enkele algebraische vergelijking bepaald worden, werd geheel opgeheven en men kon aan iedere vlakke kromme en aan elk hyperoppervlak, dat men tegenkwam, desgewenscht een stel coördinaten verbinden. Bovendien stelde het gebruik van „loopende lijncoördinaten" in staat een rechte in de ruimte door één in plaats van door twee vergelijkingen vast te leggen en hetzelfde gold later mutatis mutandis voor lineaire ruimten van meer dimensies. Zoo stond men voor de vraag: is het mogelijk een willekeurige algebraische varieteit, die door zekere vergelijkingen is gedefinieerd,

door middel van één enkelen toegevoegden vorm te bepalen? Aan Chow gelukte het in samenwerking met Van der Waerden een bevestigend antwoord hierop te geven, waarmede de algebraische varieteiten tevens in het bezit van een coördinaatgreep waren gekomen, opgeleverd door de coëfficienten hunner toegevoegde vormen [14].

Van vergaande beteekenis werd dit resultaat, doordat Chow kon aantoonen, dat de verzameling van alle algebraische varieteiten van gelijken graad en gelijke dimensie te beschouwen is als een algebraische varieteit in een beeldruimte. Een algebraisch stelsel der betrokken varieteiten wordt dientengevolge tot een algebraische varieteit in deze ruimte en uit vele eigenschappen bewezen voor algebraische varieteiten volgen terstond merkwaardigheden omtrent stelsels daarvan [14].

Het voordeel van de juist beschreven werkmethode is niet alleen een geweldige arbeidsbesparing, doch ook dikwijls het oplosbaar maken van anders schier niet op te lossen problemen. Wij ontmoeten erin een zeer algemeene gedaante van een z.g. „overdrachtsbeginsel". Slechts in de meest eenvoudige gevallen is het mogelijk dit synthetisch te imiteeren, want men stuit op moeilijkheden, die behalve in de hoogte van het aantal dimensies haar oorsprong vinden in het feit, dat de beeldvarieteiten in het algemeen niet lineair zijn, zooals tot uitdrukking komt in de overtalligheid der coördinaten in kwestie. In de gewone euclidische ruimte bepalen twee punten een verbindingsrechte, dat wil zeggen een verzameling van punten, die door elk tweetal zijner elementen volkomen gedefinieerd is en op gelijke wijze is de snijlijn van twee vlakken ondubbelzinnig bepaald door elk tweetal vlakken van den vlakkenwaaier, dien zij draagt. Dit zijn twee gevolgen van de lineariteit dezer ruimte. Nemen wij echter twee rechten in de ruimte, dan correspondeert daar niet een overeenkomstige figuur mede, want de rechten tezamen vormen geen lineaire ruimte. Zeer bekend is trouwens de door Klein aangegeven afbeelding van het stelsel der rechten der projectieve driedimensionale ruimte op de punten van een tweedegraads hyperoppervlak in de vijfdimensionale projectieve ruimte.

Wij kunnen de resultaten van Chow ook zoo samenvatten, dat door hem de algebraische variteiten tot ruimte-elementen zijn gemaakt. Dat in de synthetische meetkunde het gebruik van meer dan één ruimte-element geheel ontbreekt is niet in overeenstemming met de werkelijkheid. Hilbert fundeert de euclidische meetkunde met behulp van de gelijkwaardige grondobjecten punt, rechte en vlak [15]) en Bieberbach baseert de projectieve meetkunde op dezelfde drie

objecten, teneinde het bestaan van het dualiteitsbeginsel te laten uitkomen [21]. In het algemeen echter gaat men uit van het punt als eenig ruimte-element. Dit geldt zoowel van de klassieke auteurs, die met Hero een rechte lieten ontstaan door beweging van een punt [8], als van de moderne, waarbij men definities aantreft als: een vlak is een verzameling van punten, die deelverzamelingen bezit met zekere axiomatisch vastgestelde eigenschappen. Deze deelverzamelingen heeten rechten, wanneer men op een projectief vlak aanstuurt en bij voorbeeld cirkels, indien men naar een invers vlak koerst [16].

De voorkeur om rechten, cirkels, vlakken en algemeen krommen en oppervlakken niet zelfstandig, doch als puntverzamelingen in te voeren, berust op het feit *), dat voor het gevoel van de meesten het punt het natuurlijkste, men zegt ook het eenvoudigste of het intuïtieve ruimte-element is en dat bij het bezigen van andere elementen het voorstellingsvermogen op den achtergrond treedt [3]. Of het punt inderdaad recht heeft op dezen voorrang is een kwestie, die o.a. verband houdt met de al dan niet geldigheid van de euclidische meetkunde in de wereld buiten ons. Wij staan hierbij niet stil, doch wijzen er alleen op, dat dit in de synthetische methode geconstateerde verschijnsel een gevolg is van de waarneming der physische realiteit. Deze beinvloedt niet slechts de keuze der grondbegrippen, doch ook die der grondstellingen, waarbij men niet gaarne een betrekkelijk gecompliceerd theorema, tot axioma verheft, maar liefst een, dat door een teekening eenvoudig aanschouwelijk is te maken.

Voortdurend wordt het historisch contact tusschen de abstracte meetkundige en de concrete physische ruimte onderhouden door het gebruik van *figuren*. Het is onjuist een wezenlijk verschil te zien tusschen de wijze, waarop de algebraische en die, waarop de synthetische methode dit doet; want wel zal de algebraicus met klem U verzekeren, dat de figuur hem alleen dient ter ondersteuning van den gedachtengang en dat er nimmer een conclusie aan mag worden ontleend, maar de syntheticus doet hiervoor niet onder. Immers hij betoogt met evenveel nadruk, dat de geteekende figuur niet in alle maar slechts in de afgesproken eigenschappen een representant van de gedachte is en dat men bij het maken van gevolgtrekkingen nauwlettend moet toezien uitsluitend op deze eigenschappen te steunen [23]. Jacob Steiner, de meetkundige over wiens ongeluk ik

*) Baldus geeft als tweede motief: uitbreiding tot meer dimensies eenvoudiger [22].

U in den aanhef sprak, bracht dit tot de opvatting, dat stereometrische overpeinzingen slechts dan correct zijn, als zij zuiver, zonder eenig verzinnelijkingsmiddel uit den geest voortkomen en Von Staudt was in dezen consequent tot het uiterste, toen hij in zijn „Geometrie der Lage" geen enkele figuur opnam [1]).

Intusschen een dergelijke extreme houding behoort tot de uitzonderingen. De geometer kan geen afstand doen van de figuren, die hem nu eens den weg wijzen, dien hij te volgen heeft, dan weer inspireeren tot belangrijke nieuwe vraagstukken en die, indien hij een sterke visualisatie bezit, den arbeid van zijn geheugen steunen [17]). Wanneer in de analytische meetkunde wordt bewezen, dat een centraal oppervlak van den tweeden graad drie hoofdassen bezit, geschiedt dit soms aan de hand van een teekening, die de toestand in het oneindig verre vlak weergeeft en — zij het gestippeld — ook den imaginairen bolcirkel vertoont. Bij beschouwingen over den parallelhoek in de hyperbolische meetkunde beeldt men de beide rechten door een punt, die met de oorspronkelijke parallel zijn af door twee lijnen, die men normaal met krommen zou betitelen. Evenzoo illustreert men allerlei stellingen omtrent algebraische krommen met schetsjes, die geen andere waarde hebben dan tot de verbeelding te spreken en maakt men onderzoekingen over irreducibele algebraische varieteiten eenvoudiger te volgen door in begeleidende figuren met het „algemeene punt" een stip te laten correspondeeren, hoewel dit geen punt in den gewonen zin des woords is.

Aan de vervulling der algemeene begeerte in een figuur gedemonstreerd te zien de gegevens, waarover men beschikt of de resultaten, waartoe men gekomen is, zijn zekere grenzen gesteld, want bij voorbeeld het feit, dat een isotrope rechte een onbepaalden hoek met zich zelf insluit, laat zich bezwaarlijk aanschouwelijk maken. Somtijds is men in de gelegenheid een niet of moeilijk af te beelden situatie min of meer overzichtelijk te maken door het opstellen van een schema, zooals in het geval van de configuratie gevormd door de negen buigpunten van een vlakke derdegraads kromme of in dat der eindige meetkunden. Slechts een enkele maal blijkt het mogelijk in een teekening met pijltjes aan te geven, dat de eene eigenschap een gevolg is van de andere, anders gezegd alleen zeer weinig gecompliceerde stellingen zijn volledig in beeld te brengen. De figuur dient voornamelijk als gids bij het bewijs, die op de idee brengt van de vermaarde hulplijn in de synthetische meetkunde en op de gedachte van den voordeeligsten parameter of het beste coördinatenstelsel in de analytische.

Hoewel de figuren dus in de twee typen van meetkunden theore-

tisch dezelfde rol spelen, zijn zij toch in de algebraische meetkunde van minder belang dan in de synthetische. Spreekt men in de gearithmetiseerde geometrie van een punt, dan denkt men aan een getallengreep en spreekt men over een afstand, dan ziet men een bepaalde formule voor zich. M.a.w. men concretiseert de meetkundige begrippen zonder dat men iets teekent. Bovendien: beschouwt de algebraische meetkundige de een of andere stelling, dan is zijn begintaak het gegeven en het gevraagde in formule te brengen, hetzij door het invoeren van coördinaten, hetzij door uit te gaan van de algebraische definities der optredende objecten en relaties. Heeft hij deze volbracht, dan kan het zijn, dat hij algebraisch gesproken tot een trivialiteit is gekomen, zoodat steun van een figuur bij het bewijs overbodig is. De meeste meetkundige vraagstukken zullen echter leiden tot meer ingewikkelde problemen, die dikwijls algebraisch bezien evenzeer waarde bezitten. Ook in deze gevallen kan men het veelal zonder figuur stellen, omdat de weg, dien men in het bewijs moet volgen, nu tevens gewezen wordt door algebraische kenmerken, zooals den bouw der vergelijkingen of de omstandigheid, dat van den eenen parameter lagere machten voorkomen dan van den anderen. Dergelijke algebraische wegwijzers mist de synthetische meetkundige, waarom hij eerder zal overgaan tot het vervaardigen van een teekening.

Ondanks al de opgesomde bezwaren blijft vaststaan, dat ook een synthetische meetkunde zonder figuren mogelijk is. De punten, rechten en vlakken gebezigd bij den axiomatischen opbouw bestaan slechts op grond van een postulaat en de onderlinge relaties er tusschen zijn uitsluitend het gevolg van de aanvaarde axioma's. Men mag deze objecten niet identificeeren met physische punten, rechten en vlakken of met abstracties daarvan, zelfs niet wanneer men te maken heeft met de stereometrie. Bij een opzet van de driedimensionale projectieve meetkunde zal het o.a. niet tot moeilijkheden leiden, wanneer men zich een physisch vlak voorstelt, telkens wanneer van een meetkundig punt en een physisch punt steeds, wanneer van een meetkundig vlak wordt gesproken.

Wil men elke bijgedachte aan iets materieels absoluut voorkomen, dan moet men ook de meetkundige taal verwerpen. Een uitdrukking als: de verbindingsrechte van twee punten wekt veel te veel de herinnering aan de physische realiteit en dient vervangen te worden door: het element van de tweede soort toegevoegd aan twee elementen van de eerste soort. Uit overwegingen van exactheid begint men veelal met deze terminologie om dan later over te gaan op

de normale. Het is een kwestie van smaak in hoeverre men bij voortzetting daarvan nog van meetkunde zou kunnen spreken.

Nog op één onderwerp uit de synthetische meetkunde moeten wij in dit verband wijzen nl. de *constructies*. Deze zijn hierom zeer merkwaardig, dat zij niet worden geconcretiseerd door een teekening doch door het teekenen, waardoor de verbinding met het materieele buitengewoon sterk is. Hilbert beperkt er zich niet toe vast te stellen, dat op grond van zijn eerste vier groepen van axioma's vier bewerkingen mogelijk zijn nl. het verbinden van twee punten, het snijden van twee niet parallelle rechten, het afpassen van lijnstukken en het afpassen van hoeken, doch hij gaat ook na, welke instrumenten voor de uitvoering benoodigd zijn [15]). Men blijkt te kunnen volstaan met een liniaal en met een maat, die in staat stelt één enkel vast lijnstuk uit te zetten, bij welke teekenapparaten wij, omdat voor ons besef de wereldruimte een euclidische is, zonder bezwaar aan de gelijknamige physische mogen denken.

Het is begrijpelijk, dat hierbij aansluit een onderzoek naar de eischen, waaraan een constructie-opgave moet voldoen om met deze twee instrumenten uitvoerbaar te wezen. De uitkomst daarvan luidt, dat bij analytische behandeling de coördinaten van de gezochte punten uit die der gegeven punten op een bepaalde wijze moeten zijn te verkrijgen. Wij ontmoeten hier een zuiver meetkundig vraagstuk, dat alleen met analytische middelen tot oplossing is te brengen. Zooals te verwachten, komen wij tot een analoog resultaat, wanneer wij nagaan, wat met behulp van passer en liniaal in de gewone euclidische meetkunde is te construeeren. De onmogelijkheid van de driedeeling van den hoek, van de verdubbeling van den kubus en van de quadratuur van den cirkel zijn niet zonder algebraische hulp aan te toonen.

Deze en dergelijke feiten deden in de synthetische meetkunde ontstaan een verschijnsel, dat men zou kunnen noemen een *streven naar zelfhandhaving*. Dit uit zich allereerst in de pogingen om de langs algebraischen weg ingevoerde begrippen ook zuiver meetkundig te definieeren. Een voorbeeld vindt men in een publicatie uit 1930 van Tadahiko Kubota over: „Een kenmerkende eigenschap van de vlakke algebraische krommen van den graad *n*" [18]). De eigenschap, die de *n*-de-graads krommen tot algebraische maakt, blijkt te zijn: door een willekeurigen bundel van parallelle-rechten zóó in *n* punten gesneden te worden, dat het zwaartepunt dezer *n* punten een rechte beschrijft.

Een andere uiting van het aangegeven verschijnsel treft men aan bij de axiomatici, die er zich op toe leggen zoo min mogelijk be-

grippen in te voeren en zoo weinig mogelijk axioma's te aanvaarden, die geen meetkundig aanschouwelijk karakter dragen en slechts camouflages van algebraische begrippen of axioma's zijn.

Toen wij met Hilbert op grond van meetkundige axioma's coördinaten invoerden, voegden wij aan een punt één of meer lijnstukken en geen getallen toe, zoodat nog een breede kloof de axiomatische synthetische van de algebraische meetkunde bleef scheiden. Om deze te overbruggen is het noodig, dat wij aan de axioma's waarop de lijnstukrekening berust, een nieuw toevoegen. Met dit z.g. „axioma van Archimedes" of „axioma van het meten" is men in staat op een willekeurige reëele rechte na de keuze van een nulpunt en een eenheidspunt, aan ieder punt een reëel getal als coördinaat toe te wijzen. Omgekeerd correspondeert dan nog niet met ieder reëel getal een punt op de rechte, want om dit te bereiken moet een volgend axioma, het „lineaire volledigheidsaxioma" worden aanvaard [15]) [22]).

Deze twee ten besluite opgestelde axioma's, die gezamenlijk den naam „continuiteitsaxioma's" dragen, mogen in een axiomatische fundeering der projectieve meetkunde niet voorkomen, omdat zij o.a. congruentieaxioma's onderstellen en dus „metrisch" zijn [7]). Men introduceert in dit geval de continuiteit veelal door een enkel ander axioma, dat niet anders is dan een projectief meetkundige formuleering van het arithmetische axioma van Dedekind [19]). Hiertegen gaan nu speciaal de bezwaren der puristen, die van oordeel zijn, dat het stelsel der reëele getallen bevoorrecht wordt boven andere, zonder dat daarvoor meetkundige gronden zijn aangewezen.

De pogingen zonder het becritiseerde axioma tot hetzelfde resultaat te komen, kunnen niet ten volle geslaagd genoemd worden, zoodat het doel dát Von Staudt in 1847 nastreefde: de projectieve meetkunde geheel zonder metrische hulpmiddelen te grondvesten, niet bevredigend is bereikt [20]). Wanneer men bij voorbeeld overgaat tot het toevoegen van „ideale" punten door middel van „sneden", kleeft aan deze handelwijze veelszins hetzelfde gebrek als aan het axioma van Dedekind.

In de dertiger jaren dezer eeuw heeft men op volslagen andere wijze oplossing van de moeilijkheden gezocht, en wel door de hulp in te roepen van de topologie, die ook voor de grondvesting van de algebraische meetkunde groote beteekenis had. Om eenigermate te schetsen, wat de uitkomst dezer onderzoekingen was, keeren wij even terug tot de lijnstukrekening en wijzen op het feit, dat de lijnstukken op een vaste rechte met een vast beginpunt wegens hun optelbaarheid en vermenigvuldigbaarheid een „lichaam" vormen.

Dit lichaam bezit wel reeds eenige speciale eigenschappen, zooals de lineaire ordening en de commutativiteit, doch is niet behoudens isomorphie ondubbelzinnig bepaald. Er zijn dus op grond van de eerste vier groepen axioma's van Hilbert nog niet-isomorphe lichamen, d.w.z. verschillende vormen van meetkunden mogelijk en de strekking van de continuiteitsaxioma's is, door nadere eischen te stellen, waaraan het lichaam moet voldoen, de structuur der meetkunde eenduidig te bepalen.

In de projectieve axiomatica wordt een lichaam geintroduceerd door de „worp-" of „punt-rekening", die groote overeenkomst vertoont met een tweede methode van lijnstukrekening door Hilbert ontworpen en door Hessenberg vereenvoudigd, waarbij de vermenigvuldiging niet noodzakelijk commutatief is [21]. Daar het aantal axioma's waarop deze invoering steunt, veel geringer is dan in het door ons besproken metrische geval, bezit het lichaam geen enkele speciale eigenschap en zijn nog zeer uiteenloopende projectieve meetkunden mogelijk. Sommige bevatten zelfs niet meer dan een eindig aantal punten, rechten en vlakken. De opgave is dus: zoodanige zuiver meetkundige axioma's toe te voegen, dat het lichaam der groeiende meetkunde juist met het lichaam der reëele getallen isomorph wordt. Nu kan men door de stelling van Pascal voor een ontaarde kegelsnede te postuleeren bewerken, dat de vermenigvuldiging commutatief wordt en voorts door te verordenen, dat de successieve constructie van vierde harmonische punten steeds nieuwe punten oplevert er voor zorgen, dat iedere rechte oneindig veel punten bezit, maar daarmede is men nog niet gereed. Hier komt nu de aangekondigde assistentie der topologie tusschen beiden en leidt tot het volgende continuiteitsaxioma: „Het lichaam der meetkunde is een continue, samenhangende en locaal bicompacte topologische ruimte" [21].

Dat dit axioma aan den eisch der aanschouwelijkheid voldoet, is moeilijk vol te houden. Er pleit dan ook veel voor de opvatting royaal onmacht te bekennen en niet bedekt onder meetkundig gewaad, doch openlijk de reëele getallen in te voeren door een axioma luidend: „Het lichaam der meetkunde is isomorph met dat der reëele getallen [21] [24]. Dit heeft bovendien het voordeel, dat men door isomorphie met andere lichamen dan dat der reëele getallen te postuleeren eenvoudig andere vormen van meetkunden kan defini-eeren. Het aanvaarden van een dergelijk „lichaamsaxioma" geeft nauwe aansluiting bij de algebraische meetkunde, die tot coördinaten harer objecten niet alleen, zooals in de eerste periode der ontwikke-

ling reëele of complexe getallen, maar algemeen elementen uit een willekeurig lichaam kiest.

De thans gegeven uiteenzettingen bewijzen geenszins, dat een meer meetkundige wijze om de continuiteit in te voeren tot de absolute onmogelijkheden behoort, maar zij doen wel de vraag rijzen of de mensch in staat is in de physische realiteit continua in mathematischen zin waar te nemen. Zonder positie te kiezen in het verschil, dat hieromtrent van oudsher onder de wiskundigen bestaat, worde alleen vermeld, dat Borel het continuum door de geometrische intuitie onmiddellijk gegeven acht. Volgens hem is de belangrijkste eigenschap ervan de homogeniteit, waardoor het onmogelijk is afzonderlijke elementen van het continuum door bijzondere teekens te kenmerken. Daartoe is men eerst in staat na de invoering van arithmetische begrippen, waarbij alle moeilijkheden, die optreden bij de fundeering der rekenkunde, zich doen gevoelen [9]).

Zeer merkwaardig in dit verband is, dat Hilbert voor het grootste gedeelte van zijn synthetische verhandeling het volledigheidsaxioma niet noodig heeft, terwijl een continuiteitsbeschouwing bij Euclides slechts in twee gevallen onmisbaar blijkt. Verheffen wij de evidente stelling: een lijnstuk dat een punt binnen een cirkel C en een punt er buiten verbindt, heeft met dien cirkel C een snijpunt gemeen, tot axioma, dan is de gebruikelijke inhoud der euclidische planimetrie volledig af te leiden [8]) [19]), en iets analoogs geldt voor hetgeen men gewoonlijk in de synthetische projectieve meetkunde bespreekt.

Dat het axioma van Dedekind of een aequivalent daarvan bij Euclides niet voorkomt is vanzelf sprekend, want het is een existentiepostulaat en Euclides neemt het bestaan van een punt slechts als bewezen aan, wanneer een constructie voor dit punt bekend is. Daarentegen is van modern standpunt incorrect, dat ook het juist uitgesproken noodzakelijke axioma ontbreekt, omdat Euclides, hoewel van meening zuiver logisch te redeneeren, zich in werkelijkheid op de physische voorstelling beroept.

Het maken van dergelijke vergissingen achten vele mathematici zóó voor de hand liggend, dat het toepassen van de synthetische methode bij hen in discrediet staat. Dit oordeel is onbarmhartig, want wij hebben hier het gebrek van een deugd.

Het gebruik van coördinaten heeft het arbeidsveld der meetkundigen aanzienlijk vergroot, hier en daar belangrijke arbeidsbesparing opgeleverd en bij de grondvesting der meetkunde onmisbare hulp verleend. Maar al mogen de resultaten der algebraische meetkunde door hun grootere algemeenheid terecht imponeeren, aan haar aan-

schouwelijker karakter dankt de synthetische methode op haar beperkte terrein een blijvend recht op bestaan.

AANTEEKENINGEN.

1. Hk de Vries, Beknopt Leerboek der Projectieve Meetkunde, 1923.
2. E. J. Dijksterhuis, Descartes als Wiskundige, 1932.
3. H. Beck, Koordinatengeometrie Band I, 1919.
4. G. Salmon & W. Fiedler, Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformationen, 1877.
5. Hk de Vries, Inleiding tot de studie der Meetkunde van het aantal, 1936.
6. J. C. H. Gerretsen, De topologische grondslagen der meetkunde van het aantal, 1939.
7. G. Hessenberg & W. Schwan, Grundlagen der Geometrie, 1930.
8. E. J. Dijksterhuis, De Elementen van Euclides Deel I, 1929.
9. A. Heyting, Mathematische Grundlagenforschung, 1934.
10. J. F. Koksma, Wiskunde en Waarheid, 1936.
11. B. L. van der Waerden, Einführung in die Algebraische Geometrie, 1939.
12. W. Gröbner, Idealtheoretischer Aufbau der algebraischen Geometrie, Teil I, 1941. Zie ook Math. Ann. 115 (1938), 354.
13. B. L. van der Waerden, Math. Ann. 115 (1938), 361.
14. W. L. Chow & B. L. van der Waerden, Math. Ann. 113 (1937), 692.
15. D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 1930.
16. L. J. Smid, Over Cirkelmeetkunden, 1928.
17. J. Wolff, Over het subjectieve in de Wiskunde, 1922.
18. T. Kubota, Math. Z. 31 (1930), 625.
19. B. L. van der Waerden, De logische Grondslagen der Euklidische Meetkunde, 1937.
20. M. Pasch & M. Dehn, Vorlesungen über neuere Geometrie, 1926.
21. L. Bieberbach, Einleitung in die Höhere Geometrie, 1933.
22. R. Baldus, Ein Axiomensystem der komplexen, projektiven Geometrie S. Ber. München 1932 S. 149—191.
23. Th. Vahlen, Abstrakte Geometrie, 1940.
24. O. Veblen & J. W. Young, Projective Geometry, Vol. II, 1918.

HET MATHEMATISCH CENTRUM [1])

door

DR. J. G. VAN DER CORPUT.

Toen Newton zijn Principia Mathematica schreef, kon hij niet voorzien, dat hij daardoor Gulliver naar een onbewoond eilandje zou sturen, waar op een warme zomermiddag een door de lucht drijvend gevaarte vlak bij den onverbeterlijken ontdekkingsreiziger in zee neerstrijkt. Dit gevaarte, Laputa geheten, is in de macht van wiskundigen, die met het hoofd in de nek peinzend rondlopen en zich zo hartstochtelijk aan bespiegelingen en overpeinzingen overgeven, dat speciaal daartoe aangestelde bedienden hen voortdurend uit hun verstrooidheid moeten wakker kloppen. Zij vertonen een verbazende loomheid van geest en tegenzin in het begrijpen van andere zaken, dan die, waarbij lijntjes en vlakjes en muzieknoten de hoofdrol spelen, maar toch verbeelden zij zich van de overige dingen minstens evenveel, zo niet meer verstand te hebben dan anderen, die zich speciaal met die kwesties bezig houden. Critiek, vitterigheid en betweterij zijn dan ook bij hen schering en inslag, behalve als ze het eens zijn, hetgeen hun zowat twee- of driemaal in hun gehele leven overkomt. Het ontbreekt hun totaal aan vindingrijkheid en verbeeldingskracht, ja hun taal mist zelfs een woord voor deze eigenschappen, maar toch verkeren ze doorlopend in een toestand van gejaagdheid en onrust, bezorgd als zij zich maken over rampen, die ergens in het heelal over millioenen jaren zouden kunnen geschieden. De hoofdstad van het land bezit een schitterende academie van wetenschappen, waar beroemde leermeesters op een zonderlinge manier doceren en grote geleerden streven naar volslagen onpraktische ontdekkingen.

De kleermaker, die Gulliver een costuum moet aanmeten, bepaalt zijn lichaamslengte met quadrant, passer en liniaal. Tengevolge van een rekenfout wordt het pak een volledige mislukking, maar in dat land valt zo iets gelukkig niet op, omdat rekenfouten daar regel zijn.

In deze satire wordt vooreerst de in de wolken levende dromer belachelijk gemaakt, die geheel in zijn bespiegelingen over mathematische symbolen opgaat, zonder zich af te vragen of zijn onderzoekingen ooit enig praktisch nut zullen opleveren, maar die toch, door een zonderlinge speling van het lot, onmisbaar is in de rij der ontdekkers, die ons in staat stellen in twee dagen van Batavia naar

[1]) Rede uitgesproken bij de aanvaarding van het Hoogleraarsambt aan de Universiteit te Amsterdam op 1 April 1946.

Amsterdam te vliegen en gehele steden binnen enkele minuten van de aardbodem weg te vagen. Swift kan niet nalaten ook de wiskunde-leraren in een bespottelijk daglicht te plaatsen, maar omdat dat zo in zijn kraam te pas komt, houdt hij een derde categorie, die toch in zijn verhaal onmisbaar is, achter de schermen, namelijk hen, die de mathesis op de natuurkunde toepassen. Zonder het minste stootje of schokje, zweeft, rijst of daalt Laputa naar believen en de oppermathematicus bombardeert van uit de lucht op opstandelingen, die wegkruipen in schuilkelders, precies alsof het 1940 was. Merkwaardig dat in deze persiflage, ingegeven door een persoonlijke wrok tegen Newton en een onredelijk vooroordeel tegen de wiskunde en de natuurwetenschappen, de schrijver toen al voorzien heeft, dat de wiskunde de mensheid eenmaal in staat zou stellen de natuur te beheersen, ten goede en ten kwade.

Aan de drie genoemde typen van mathematici moet de Universiteit haar aandacht wijden. Zij behoeft dat, althans voorlopig, niet te doen met het geslepen en geniale gilde der wiskundigen, die zich op het gebied van de misdaad bewegen (pro of contra, al naar gelang dat uitvalt); vertegenwoordigers van dat gilde heb ik tot nog toe helaas alleen in romans ontmoet.

De twee delen, waarin de wiskunde verdeeld worden, dragen de namen van zuivere en toegepaste wiskunde, alsof het tweede minder zuiver was dan het eerste. Op den beoefenaar van de zuivere mathesis zijn de volgende regels van Shakespeare van toepassing:

Turns them to shapes and gives to airy nothing
A local habitation and a name.
Schenkt hun een vorm en geeft aan luchtig niets
Een woonplaats en een naam.

Dit moet men als volgt verstaan. Eenheid en herhaling leveren de rij der natuurlijke getallen, met behulp waarvan men weer nieuwe begrippen kan vormen. Als allereenvoudigste treden de paren der natuurlijke getallen op, bijvoorbeeld (8, 3) en (14, 6). Krachtens zijn absolute souvereiniteit geeft de mathematicus aan deze nieuwe begrippen een naam; hij stelt naar eigen goeddunken hun eigenschappen vast en geeft hun een plaats te midden van de reeds bekende entiteiten. Soms noemt hij de ingevoerde getallenparen rationale getallen en dan decreteert hij, dat de som van de twee genoemde paren (8, 3) en (14, 6) gelijk is aan 5; bij andere gelegenheden weer spreekt hij van negatieve of complexe getallen en telkens kent hij aan de som een andere waarde toe. Heeft hij zijn grondwet eenmaal opgesteld, dan is hij verplicht zich daaraan slaafs

te houden, want een kleine wijziging in een schijnbaar ondergeschikt punt van de constitutie werpt de gehele wetgeving ondersteboven.

Hij krijgt dan een geheel nieuwe wiskunde. Betreurt Gij de tijd, door U aan de algebra besteed, als Gij verneemt, dat naast die edele door U beoefende wetenschap, nog 1151 andere algebra's mogelijk zijn, elk algemener dan die, welke U is voorgelegd? Of vindt U het een geruststelling, dat Uw kindskinderen later op school in geen geval meer dan 1152 verschillende algebra's zullen leren? Dat zal trouwens wel enige tijd duren, want er zijn nog slechts een paar honderd algebra's onderzocht. In die menigte komt de gewone schoolalgebra lelijk in het bedrang, te meer nu, ten gevolge van de ontwikkeling der physica, de niet-commutatieve algebra zo'n enorme plaats voor zich opeist.

Indien ik me niet vergis, zal de ontwikkeling van de wiskunde in de eerste helft van deze eeuw door drie hoofdstromingen bekend blijven. Vooreerst door de grondslagenstrijd, ontketend door onzen stadgenoot L. E. J, Brouwer, en verder door het streven naar abstractie, op schier ieder terrein van de zuivere wiskunde, in het bijzonder in de algebra, waarbij onze landgenoot B. L. van der Waerden op de voorgrond treedt. Het tweede karakteristieke verschijnsel is wel-is-waar van beperktere omvang, doch m.i. ook van essentiële betekenis namelijk de merkwaardige bloei, althans op enkele punten, van de analytische getallenleer, onder leiding van Landau, Hardy, Littlewood, Vinogradow en anderen.

Als men U vraagt, op hoeveel verschillende manieren 200 geschreven kan worden als een som van natuurlijke getallen, zult U, tenzij U behoort tot de categorie, die principieel weigert op enige mathematische vraag, welke dan ook, in te gaan, wellicht ten antwoord geven, dat dat aantal vermoedelijk een zeer groot geheel getal is. Inderdaad, het is een getal van 13 cijfers, dat ik U zo dadelijk noemen zal, maar het merkwaardige is, dat de moderne getallenleer Uw opmerking, dat het aantal een geheel getal is, bewust negeert. Hardy en Ramanujan hebben in 1917 een asymptotische benaderingsformule afgeleid, waarmede zij het gevraagde gehele getal, let wel, in drie decimalen achter de komma berekenen. Acht termen van hun reeksontwikkeling geven het antwoord

3.972.999.029.388

met een fout van 0,004, zodat hun approximatieve formule met één slag het exacte resultaat oplevert.

Toen ik eens een bekend staatsman mededeelde, dat ik mij in mijn vrije tijd met getallenleer bezighoud, vroeg hij verwonderd:

„Hoe kan iemand daar zijn tijd aan besteden? Wat is daarvan nu het praktisch nut?"

Zo redeneert een mathematicus pur sang niet. Het kan hem weinig schelen, hoe in het hierboven genoemde getal van 13 cijfers het derde of vierde cijfer er uitziet, maar de rij der natuurlijke getallen is het fundament, waarop de wiskunde en een deel van onze beschaving berust en de mensheid moet haar eigenschappen doorgronden. Hoe vreemd het ook moge klinken, in de rij der natuurlijke getallen, zo star en strak verbonden, zo simpel opgebouwd door toevoeging van telkens weer een nieuwe eenheid, in die rij heerst een grote chaos. Een ondeelbaar getal bezit slechts twee delers, namelijk 1 en zichzelf, maar zijn onmiddellijke opvolger beroemt zich misschien op een enorm aantal delers. Verander een natuurlijk getal met slechts één enkele eenheid en ge verandert zijn arithmetisch karakter totaal. Het beginsel van de geleidelijke overgang, waarop bijv. de gehele analyse berust, ontbreekt hier, dus in het fundament van de mathesis, ten enenmale. Hoe ver men ook in de rij der natuurlijke getallen voortschrijdt, er blijft wanorde, maar toch, de onderzoekingen van deze eeuw hebben op verschillende gebieden, in het bijzonder in de additieve getallenleer, voor grote getallen wetmatigheden ontdekt die kleine getallen niet bezitten. Het is, alsof de getallen in hun onstuimige jeugd allerlei capriolen maken en een eigen persoonlijkheid bezitten, zich verzettend tegen iedere inmenging van buiten af, terwijl ze, ouder geworden en moe gestreden, bedachtzaam zich enigszins aanpassen aan hun milieu. De methode van Hardy en Ramanujan lukte, omdat 200 zich met de bezonnenheid van een groot getal gedraagt.

Nu dit inzicht eenmaal verworven is, worden methoden geschapen ter opsporing van de wetten, geldig voor grote getallen. De kleine krijgen als straf voor hun dartelheid, dat ze maar voor zich zelf moeten zorgen; die mogen al heel tevreden zijn, als een rekenmeester hen in een tabel opneemt, waaruit hun rekenkundige eigenschappen domweg kunnen worden afgelezen. Men houde daarbij in het oog, dat slechts een paar getallen zo stiefmoederlijk behandeld worden, misschien honderd, misschien honderd millioen (dat hangt van het probleem af), maar in elk geval een eindig aantal, zodat het onderzoek daarvan een kwestie van tijd en vlijt is.

Het is mogelijk, dat vele asymptotische formules, die de eigenschappen der grote getallen verraden, later vervangen zullen worden door even bruikbare identiteiten, welke ook voor kleine getallen geldigheid bezitten. Rademacher heeft dat in het probleem van

Hardy en Ramanujan gedaan, maar zo ver zijn we in de andere gevallen nog niet.

Als de Russische geleerde Vinogradow onderzoeken wil, welke oneven getallen te schrijven zijn als som van drie ondeelbare getallen, maakt hij het probleem schijnbaar moeilijker door zich de vraag te stellen, op hoeveel verschillende manieren een gegeven oneven getal *n* in die gedaante gebracht kan worden. Bij grote waarde van *n* vindt hij voor dit aantal een zeer nauwkeurige benadering, welke positief uitvalt, zodat elk oneven getal boven een bepaalde grens te schrijven is als som van drie ondeelbare getallen. Of dit ook het geval is met de oneven getallen > 5 beneden die grens, weten we niet. Zoals gezegd, dit is slechts een kwestie van vlijt, maar die vlijt wordt niet toegepast, omdat de methode van Vinogradow, hoe belangrijk ook, toch beschouwd wordt als een overgang naar een nieuwe ontwikkeling, die ons een beter inzicht zal geven in de additieve eigenschappen der ondeelbare getallen.

De vraag van den staatsman: „Wat is daarvan nu het praktisch nut?" stelt de beoefenaar van de zuivere wiskunde zich niet. Zeker, hij houdt zich met zijn problemen bezig, omdat hij er plezier in heeft, want zonder belangstelling geen wetenschap, zonder liefde geen wiskunde, maar hij weet zich ook tegenover de gemeenschap verplicht zijn bijdrage te leveren tot de ontsluiering van de geheimen van het getal en de ruimte. Doch al peinst hij dan niet met het oog op de applicaties, in zijn hart is hij er van overtuigd — en verheugt er zich over — dat zijn resultaten eenmaal, misschien na tweeduizend jaar zoals bij Menaechmus en Apollonius, misschien binnen enkele maanden, zoals bij Courant, hun praktische toepassingen zullen vinden.

Ik sprak eens een beroemd getallentheoreticus. Dat is een contradictio in terminis, want als men een ontwikkeld Nederlander vraagt een bekend buitenlands mathematicus op te noemen, tien tegen één, dat hij dan aankomt met iemand, die helemaal geen wiskundige is. Maar goed dan, volgens dien getallentheoreticus, beroemd binnen de kring zijner vakgenoten, bestaat het mooie van de getallenleer juist daarin, dat het het enige onderdeel van de wiskunde is, hetwelk nog niet door toepassingen op de natuurkunde misbruikt wordt. Hij zei dat slechts in scherts. Trouwens, dat misbruik vindt ook in de getallenleer plaats, neemt daar zelfs toe.

Voor sommige beoefenaren van de zuivere wiskunde is niet het inzicht de hoofdzaak. Toen Cauchy, een der grootmeesters van de analyse, op zijn sterfbed van een priester de troost ontving, dat hij in de hemel met één slag al die dingen zou weten, waarnaar hij

hier op aarde zijn gehele leven lang tevergeefs gezocht had, zuchtte hij en zei hij:

„Daar ben ik juist zo bang voor, want het is mij niet om het weten, maar om het zoeken te doen.”

In de laatste decennia bloeide in ons land de zuivere wiskunde, maar geen wetenschap heeft tijdens de oorlog zo zware verliezen geleden als juist deze. Wolff, analyticus van formaat en Nieland, verdienstelijk getallentheoreticus, zijn vermoord; Schaake, de scherpzinnige geometer van Groningen, is overleden; in Utrecht en Leiden staan thans of komen binnen enkele maanden de meetkunde-zetels open, in verband met de pensioengerechtigde leeftijd der bekleders. Welke mutatie aan deze Universiteit plaats vond, behoef ik U niet te vertellen. Gelukkig zijn er jongeren, die de brandende fakkel kunnen overnemen en voortdragen. Als ik zeg, dat dat ook voor de praktische wetenschappen van belang is, heeft die verklaring niets te betekenen, want ik behoor zelf tot het zuivere gilde, maar juist zij, die de wiskunde toepassen, zijn er van overtuigd — en de feiten zijn er te over om die overtuiging te bevestigen —, dat een inzinking van de theoretische wiskunde later, misschien zelfs binnen korten tijd, een stagnatie in de natuurwetenschappen ten gevolge zou hebben. In de interessante oratie, waarmede Prof. S. C. van Veen ongeveer een maand geleden zijn ambt van hoogleraar te Delft aanvaardde, wijst hij op de betekenis van de zuivere en toegepaste wiskunde voor den ingenieur.

Een productief onderzoeker met onderwijsopdracht kan door zijn vak en zijn taak zo zeer in beslag genomen worden, dat hij geen tijd heeft om over zijn vak en taak na te denken. Maar verschillende van ons, beroofd van hun leerlingen, afgesneden van publicatiemogelijkheid (tenzij in onder censuur staande en voor joden verboden tijdschriften) en geplaatst voor een taak, tijdelijk belangrijker dan het dienen van de wetenschap, hebben zich in de jaren van bezetting en bezinning de vraag gesteld op welke wijze de Universiteit het best aan haar doel beantwoordt. Wat de mathesis betreft, naar mijn oordeel hebben de inrichtingen van hoger onderwijs als eerste plicht de zuivere wiskunde tot bloei te brengen. Maar daarnaast moet rekening gehouden worden met het feit, dat velen onzer leerlingen later de leerstof aan jongeren zullen overdragen. De a.s. leraren moeten, meer dan tot nu toe het geval was, op de hoogte gesteld worden van de problemen en methoden, die speciaal voor hen van belang zijn: zij moeten kennis nemen van de uitvoerige in uitstekende binnen- en buitenlandse tijdschriften voorkomende beschouwingen over de didactiek van hun vak; zij moeten in staat

gesteld worden praktische ervaring op te doen en ten slotte moeten zij later door middel van vacantiecursussen contact met de universiteit bewaren.

Hierboven heb ik twee van de drie kenmerkende verschijnselen in de ontwikkeling van de wiskunde sinds de aanvang van deze eeuw opgenoemd. Als derde karakteristiek phenomeen zie ik de noodgedwongen recente zwenking naar de toepassingen.

Zoeven sprak ik U van Vinogradow, die zich tot 1940 uitsluitend gewijd heeft aan de analytische getallenleer, een der meest onpraktische vakken, die er bestaan, maar in 1944 staat hij aan het hoofd van een team, dat zich bezig houdt met mechanica en het gebruik van rekenmachines voor de oplossing van differentiaalvergelijkingen in de mathematische physica. Zo in Rusland, zo, analoog, ook in de Angel-Saksische landen.

Hoe is het mogelijk, dat het symbolengepeins van den dromer, die misschien van de natuur niets afweet, behulpzaam, ja zelfs onmisbaar is voor de beheersing van diezelfde natuur? Sinds Galilei en Newton zijn we met dat denkbeeld zó vertrouwd geraakt, dat we het als evident aanvaarden, maar het verband tussen wiskunde en werkelijkheid is een werkhypothese, meer niet. De praktijk leert, dat het onderzoek van de natuur mèt de mathesis wèl lukt en zònder haar nièt. Er zijn wel enkele argumenten aan te voeren, die het verschijnsel minder onbegrijpelijk maken. De mathematicus is dictator, maar als hij de getallenparen (8, 3) en (14, 6) rationale getallen noemt en hun som bij decreet gelijk aan 5 stelt, doet hij, wat de Duitsers de Engelse berichtgeving verweten: hij loopt achter de feiten aan, want als kind reeds heeft hij geleerd, dat $^8/_3$ appel, vermeerderd met $^{14}/_6$ appel, precies 5 appels oplevert. M.a.w. hij past zich bij het experiment aan. Er komt echter nog iets bij.

Met een variant op een bekende uitspraak van zeker iemand (ik zal nu maar niet verklappen, dat dit Hitler is) kan men, en met meer recht, zeggen: „waar de wiskunde eenmaal haar voet gezet heeft, treedt ze niet meer terug." Vaak sluipen verdachte individuen langs een achterdeurtje het mathematisch gebouw binnen en worden in den beginne met de nek aangezien, maar later komen ze op het eregestoelte te zitten, al blijft hun naam, zoals onbestaanbare grootheid, aan hun onwettige periode herinneren. De divergente reeksen zijn in grote opwinding en onder boze woorden de deur uitgezet, maar later in plechtige optocht weer binnengehaald, waarbij de hoogste autoriteiten hun openlijk verontschuldigingen hebben aangeboden. Al gaat het in de eeuwigheid met hen mis — ik bedoel de oneindige, divergente reeksen, niet de autoriteiten —, aanvankelijk

gedragen zij zich zo behoorlijk en zijn ze zo behulpzaam, dat ze dikwijls te prefereren zijn boven hun convergente collega's, die ondanks hun soliditeit en betrouwbaarheid dikwijls een stug en onhandelbaar karakter aan de dag leggen. Wat heden streng is, is het morgen niet meer, maar leemten worden achteraf opgevuld of naast de oorspronkelijke vleugel verrijst een nieuwe, gelijkwaardige uitbouw, zij het dan ook, dat die in de aanvang minder huiselijk is dan het oude gebouw. De wiskunde is niet een verstard, verdroogd systeem van onbelangrijke redeneringen, door den een of anderen Grieksen professor tweeduizend jaar geleden (of daaromtrent) samengesteld om arme jongens en meisjes te plagen. Neen, prototype van de wiskunde is Proteus, de oude man van de zee, die de gave van voorspelling bezit, maar alle mogelijke vormen en vermommingen aanneemt, om zijn ondervragers te ontvluchten. Alleen aan dengene, die met energie en bekwaamheid lang met hem worstelt en gedurig de banden, die hem binden, al maar door strakker en strakker aantrekt, verraadt hij zijn geheimen, want pas als hij ziet, dat zijn pogingen om te ontsnappen, vruchteloos zijn, neemt hij zijn eigen gedaante weer aan en onthult hij zonder falen de toekomst. Zoals Virgilius dicht:

Novit namque omnia vates
Quae sint, quae fuerint, quae mox ventura trahantur.
Want de ziener weet alles
Alles wat is en wat was en eerlang de toekomst zal brengen.

Neen, dat is niet waar. Veel wat voor den mens belangrijk is, ja zelfs het allerbelangrijkste, ligt buiten zijn horizon, doch alles, wat in getal en maat kan worden uitgedrukt, valt binnen zijn steeds verder zich uitbreidende gezichtskring. Dit steeds wisselend Proteus-karakter van de wiskunde maakt het begrijpelijk, hoe zij, die met recht de absolute souvereiniteit voor zich opeist, tegelijkertijd als dienstmaagd in de keuken der natuurwetenschappen behulpzaam kan zijn, niet als assepoester, maar als de gelijkwaardige van haar gezusters.

Ik herinner me nog, hoe Lorentz eens op college vertelde, dat Hamilton de optica beschouwde als een meetkunde van de achtdimensionale ruimte; van de acht coördinaten waren er zes de Cartesiaanse coördinaten van twee veranderlijke punten in de gewone driedimensionale Euclidische ruimte, de zevende een kleurenindex en de achtste wat Hamilton de karakteristieke functie noemde. Door deze functie te variëren volgens het procédé, gebruikelijk in de variatierekening, vond Hamilton de differentiaalverge-

lijkingen, corresponderende met elk denkbaar probleem in de optica. U ziet, hoe vreemd alles hier toegaat. Als men een systeem van spiegels, lenzen en kristallen neerzet en aan Hamilton vraagt, hoe een invallende lichtstraal zich gedraagt, kijkt hij naar zijn acht-dimensionale ruimte en schrijft enige differentiaalvergelijkingen, d.w.z. een paar mathematische symbolen neer. Doch nu komt het merkwaardige. Dubbelbreking, waarbij een lichtstraal in tweeën gebroken wordt, was al lang bekend, maar op grond van zijn hieroglyphen deed Hamilton de door niemand verwachte voorspelling, dat onder door hem aangegeven omstandigheden een lichtstraal gesplitst zou worden in een kegel, zodat bepaalde ringen zouden ontstaan. Men keek en de lichtstraal deed, wat Hamilton gedecreteerd had. Nog levendig staat mij voor de geest het enthousiasme, waarmede Lorentz ons de ringen van Hamilton toonde.

Buitengekomen, zei een van de physische studenten:

„Bah, wat een drukte om die paar ringetjes."

Maar het ging niet om die ringetjes: Lorentz had ons verteld, hoe Hamilton met den ouden man van de zee geworsteld had en hoe Proteus eindelijk, na lange strijd, aan Hamilton een van de geheimen der natuur had verraden.

Er is een hemelsbreed verschil, of men de zuivere, dan wel de toegepaste wiskunde beoefent. Volgens Prof. F. Zernike uit Groningen is een mathematicus iemand, die bij elk bewijs naar de fout zoekt. Inderdaad, als een aanhanger van de theoretische wiskunde een betoog onder de ogen krijgt, onderzoekt hij automatisch of enkele pathologische gevallen, waarin geen enkel normaal mens de stelling zal toepassen, uitkomen. Is dat niet het geval, dan verwerpt hij de stelling. Doet hij dat niet, dan is hij verloren, want dan kan hij alles bewijzen en tegelijkertijd alles weerleggen, hetgeen voor hem geen ideale situatie is. De applicator trekt zich van die ramp niets aan: hij past de stelling immers in die gevallen toch niet toe. Hij geeft de voorkeur aan kracht boven strengheid, he prefers vigour to rigour. De theoreticus is vaak tevreden, als hij aangetoond heeft dat het antwoord in een eindig aantal stappen kan worden gevonden, ook al zou de gehele mensheid honderd millioen jaren twintig uur per dag met een Eniac moeten werken om die berekening uit te voeren; de aanhanger van de toegepaste mathesis prefereert een vlugge approximatieve oplossing boven een exacte, die veel tijd vergt. Er is wel eens beweerd — in scherts — dat een mathematicus nooit een probleem oplost, maar slechts tot een andere opgave herleidt, die hij dan weer tot een andere terugbrengt, enz. De toegepaste wiskunde stelt andere eisen: een opgave wordt dàn pas als opgelost be-

schouwd, indien het antwoord in een voldoend aantal decimalen neer te schrijven is. Mooie formules, die het oog van den theoreticus bekoren, laten den practicus koud, behalve als ze voor numerieke berekening geschikt zijn. Existentietheorema's, de lust en dikwijls de hobby der puristen, ergeren hem, tenzij ze hem in staat stellen het gevraagde antwoord binnen afzienbare tijd met voldoende benadering te vinden. De theoreticus werkt met mathematische tekens, alles liefst zo abstract mogelijk, dus zonder dat hij zich rekenschap geeft van de betekenis van datgene, wat door zijn symbolen wordt afgebeeld en hij vult de voorraadschuur, waaruit de werktuigen te voorschijn gehaald kunnen worden. De practicus moet een probleem uit een der aangrenzende gebieden herkennen en in een mathematische vorm gieten; langs wiskundige weg zoekt hij een mathematisch antwoord, hetwelk hij dan weer vertolkt in de taal, waaraan het oorspronkelijke probleem is ontleend.

In de trant van Siéyès stel ik de vragen: Wat doet de Universiteit voor de toegepaste wiskunde? Niets. Wat moet ze voor haar doen? Veel.

Om aan het betoog elk persoonlijk karakter te ontnemen, citeer ik R. S. Burington [1]), chef van de mathematische afdeling van de Amerikaanse marine. In een toespraak, in September 1944 te Ohio gehouden, licht hij aan voorbeelden toe, hoe speciaal opgeleide wiskundigen van zeer veel nut in het zakenleven, de industrie en de techniek zouden zijn; bij gebleken bekwaamheid moeten zij, in verband met hun belangrijkheid, hoge posten bekleden. Maar, zo vraagt men zich af, waarom zijn ze er dan niet? Volgens hem is een van de oorzaken de opleiding en de atmosfeer, waarin de wiskunde aan de Universiteiten wordt gedoceerd. Menigeen, van nature en aanleg mathematisch georiënteerd, wordt naar de natuurkunde getrokken of geduwd door betere salariëring, de druk van professoren in de physica en een volslagen gebrek aan belangstelling in de natuurwetenschappen van de zijde der hoogleraren in de wiskunde. Voor de studenten in de toegepaste wiskunde stelt hij een speciaal leerprogramma op, voor ongeveer 50 % uit zuivere, 30 % uit toegepaste wiskunde, 20 % uit ingenieurs- en natuurwetenschappen bestaande. In zijn peroratie wijst hij er op, dat de uitvoering van die plannen allernoodzakelijkst is voor het nationaal belang en voor het behoud van de vrede in de komende jaren.

---

[1]) New Frontiers, Address delivered to section A-Mathematics, American Association for the Advancement of Science, Cleveland, Ohio, 1944, Science *101* (1945), 313—321.
Journ. Eng. Educ. *32*; 4 December 1941.

Tot zover Burington. Bij zijn slotopmerking beseffe men, dat thans, zoals Swift reeds voorzag, alleen hij de macht in handen houdt, die de leiding in de natuurwetenschappen en de techniek bezit, waartoe de wiskunde onmisbaar is.

We zijn echter nog niet klaar, als we het er over eens zijn, dat bij het wiskunde-onderwijs drie verschillende opleidingen noodzakelijk zijn: een tot wetenschappelijk onderzoek op het gebied der zuivere mathesis, een ter beoefening van de toegepaste wiskunde en bovendien nog de leraarsopleiding, want nu volgt de vraag: hoe spelen we dat klaar?

Iedere universitaire wiskunde-docent kan in dit opzicht meewerken, door uit de overvloed van onderwerpen er enige te kiezen, die niet alleen voor den theoreticus, maar ook voor den a.s. leraar of den praktićus van belang zijn. Doch dit is slechts een partiële verbetering en bovendien komt op die manier de zo noodzakelijke verbinding tussen wiskunde en industrie niet tot stand. Er is meer nodig.

De Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen heeft in 1945 een commissie ingesteld ter coördinering en reorganisatie van het hoger onderwijs in de wiskunde in Nederland. In de taakomschrijving stond o.a. de bestudering van de wenselijkheid, c.q. mogelijkheid van een mathematisch centrum. Reeds in de bezettingsjaren hadden enkele leden van die commissie, onafhankelijk van elkaar, over dat onderwerp nagedacht; in verband hiermede stel ik er prijs op Prof. D. van Dantzig te noemen, wien van meet af aan een aparte stichting ter bevordering van de zuivere en toegepaste wiskunde voor de geest heeft gestaan. Laat ik kort zijn: op 11 Februari 1946 is te Amsterdam een afzonderlijke stichting in het leven geroepen, genaamd: „Het Mathematisch Centrum." De taak daarvan geef ik in drie woorden weer: samenwerking, leiding en onderzoek.

Eerst de samenwerking. Tot nog toe is de vooruitgang in de wiskunde aan het genie en de vindingrijkheid van den enkeling te danken, maar alle tekenen wijzen er op, dat de eenzame geleerde, die, op zijn studeerkamer teruggetrokken, over wiskunde zit te peinzen, plaats zal maken voor georganiseerde groepen, die in vrijwillige samenwerking zich op grote schaal aan gemeenschappelijke problemen wijden. De eerste taak van het Centrum zal dan ook zijn een samenwerking mogelijk te maken, waarin betrokken worden beoefenaren van de zuivere mathesis, van de toegepaste wiskunde en van gebieden, waarin deze wetenschap wordt toegepast. Meer dan ooit zullen de relaties met het buitenland moeten worden verstevigd, hetzij dat vreemde mathematici hier komen, hetzij dat

Nederlandse wiskundigen, vooral jongere, in andere centra van wiskundige werkzaamheid datgene in zich opnemen, wat ze in hun vaderland nog niet kunnen leren.

In het Mathematisch Centrum zullen theoriën worden behandeld, problemen opgegeven, oplossingen aan de hand gedaan, vragen gesteld, inlichtingen worden verstrekt.

Door haar snelle ontwikkeling wordt de wetenschap met een ernstig gevaar bedreigd. Wie even zijn zevenmijlslaarzen uittrekt, is hopeloos achter. Als men een bootje nodig heeft of met een zelf geconstrueerd scheepje in zee wil steken, hoe komt men er dan achter, of op die onmetelijke oceaan misschien ergens een vaartuig ronddobbert, dat ongeveer dezelfde vracht vervoert? Wiskundigen klagen er soms over, dat zij de tijd niet kunnen vinden om zelfs ook maar de referaten bij te houden over de publicaties, die zich tot hun eigen speciaal gebied beperken. In het Mathematisch Centrum zal op geregelde tijden, bijv. wekelijks, telkens door een specialist, een overzicht gegeven worden van hetgeen in de laatste tijd verschenen is en tevens een klapper gemaakt worden, zodat de literatuur later gemakkelijk is terug te vinden.

Een machtig hulpmiddel zijn de boeken, die een overzicht geven van een bepaald gebied gedurend een zeker tijdvak. Het zal dus ook de taak van het Mathematisch Centrum zijn personen, die daartoe de lust en de capaciteiten bezitten, aan te sporen een scherp afgegrensd terrein voor hun rekening te nemen. Kiezen ze een uitgebreid gebied, dan wordt het een werk van vele jaren, maar ook als ze zich in hun keuze beperken, verrichten ze zeer verdienstelijk werk. Het Mathematisch Centrum zal dan voor de publicatie moeten zorgen. Trouwens, dat Centrum is het aangewezen lichaam om, hetzij alleen, hetzij met anderen, wiskundige publicaties in Nederland te doen verschijnen.

Cursussen en voordrachten zullen worden gehouden, zowel voor en door wiskundigen als voor en door beoefenaren van gebieden, waar de wiskunde wordt toegepast. Er zal veel variatie zijn. De physicus en de getallentheoreticus zullen naast elkaar een cursus over operatorenrekening volgen of luisteren naar de desiderata van den statisticus, en tegelijkertijd misschien wordt in een andere zaal een onderwerp behandeld, dat zich ten opzichte van de toepassing van alle smetten vrij heeft weten te houden.

Dit over de collaboratie, zonder tribunaal. Nu de leiding. De genoemde cursussen, voordrachten en overzichten zullen worden gegeven door specialisten voor specialisten en niet-specialisten. Iedere belangstellende is welkom, de afgestudeerde en ook de stu-

dent. De best geprepareerde colleges worden wel eens de slechtste genoemd, omdat ze de indruk vestigen, dat de wiskunde onveranderlijk en doodeenvoudig is; de verwarde colleges zouden eén veel beter beeld van het eigenlijke vak geven. Het lijkt mij beter, dat de studenten goed geprepareerde colleges en daarnaast overzichten over bepaalde, voor hen interessante gebieden volgen; niet, omdat ik verwacht, dat die overzichten verward zullen zijn, maar omdat het Proteus-karakter der wiskunde nergens beter naar voren komt dan juist in die besprekingen.

Aan het werk van jonge wiskundigen zal leiding worden gegeven. Maar er moet nog veel meer gedaan worden. Wij moeten zuinig zijn met de intelligentia. Hetzelfde land, dat den wiskundige Stieltjes passeert en daardoor wegjaagt, geeft later zijn volledige werken uit, maar dan is Stieltjes dood. H. Bourget schrijft: „Devons nous déplorer cet échec, malgré ce que nous en pouvons penser? Il nous a donné Stieltjes et contribué ainsi à l'honneur de la science française de notre époque."

Ons land hoede zich voor herhaling, vooral nu, nu de toekomst moeilijk en het intellect broodnodig is.

Als in 1934 van de Nederlandse studenten slechts 5 % een beurs geniet en van de bevolking minder dan 10 % een academische studie voor zijn kinderen kán betalen, dan laat ons vaderland verreweg het grootste gedeelte van zijn capaciteiten voor de wetenschap verloren gaan. Dit is vooral ernstig vòor de wiskunde, die haar discipelen meest uit onbemiddelde kringen kiest, niet over speciale beurzen beschikt en van assistentsplaatsen verstoken is. Voor den mathematischen student aan een Rijks-Universiteit is er slechts één middel om assistent te worden: dat hij omzwaait en physicus wordt. Het is te hopen, dat aan de Nederlandse Universiteiten spoedig assistentsbetrekkingen in de wiskunde gecreëerd worden: naast een productief mathematicus, die zijn colleges goed prepareert, heeft de assistent zijn handen vol met werk. In ieder geval zal het Mathematisch Centrum de beschikking over een aantal assistenten moeten hebben.

In de Mathematical Gazette van 1936 (p. 253) lees ik, dat in Engeland het succes in de wiskunde bijna uitsluitend van drie factoren afhangt: voor 48 % beslissen karaktereigenschappen, zoals energie, volharding, betrouwbaarheid, voor 31 % algemene intelligentie en voor 19 % het vermogen om zich goed uit te drukken. In tegenstelling tot andere vakken is bij de wiskunde de laatste factor van slechts ondergeschikte betekenis, hetgeen de opvatting van een collega van mij weerspreekt, volgens wien wiskunde praten,

praten en alleen maar praten is, maar de conclusie, die ik eens in een levensbeschrijving las: „Hij was een groot wiskundige, dus een slecht redenaar" gaat m.i. weer te ver de andere kant uit.

In bovenstaande tabel mis ik echter iets, wat ik zeer belangrijk acht, namelijk de economische factor. Ik heb verschillende begaafde, enthousiaste wiskundigen leren kennen, die, evenals Dr. Lydgate in Middlemarch, op het eind van hun leven beseffen: ik ben een mislukking, want ik heb niet gegeven, wat ik had kunnen en moeten geven. Na een reeks examens, alle cum laude afgelegd, schiet er voor den jongen man praktisch niets anders over dan een leraarsbetrekking te aanvaarden, die den helen mens eist en hem misschien niet eens bijster ligt. In de aanvang probeert hij zich nog aan wetenschappelijk werk te wijden, maar na enige jaren, overbelast en oververmoeid, geeft hij het op. Bovendien, is hij tegenover zijn gezin, tegenover zijn school verantwoord om door te gaan? Er is slechts één oplossing, n.l. dat jonge, bekwame, hardwerkende, enthousiaste wiskundigen, van wie op grond van hun karakter en prestaties verwacht kan worden, dat zij de wetenschap vooruit zullen helpen — U ziet, er worden hoge eisen gesteld — aan het Mathematisch Centrum verbonden worden, waar zij zich geheel aan wetenschappelijk werk kunnen wijden, totdat zij elders een plaats krijgen, die aan hun speciale begaafdheid beantwoordt.

Misschien maakt U bij Uzelf de opmerking, dat U nog niet gehoord hebt, wat het Centrum denkt te doen voor de wiskundeleraren en voor hen, die het willen worden. Wij stellen ons voor, dat cursussen en voordrachten gehouden zullen worden over problemen, die speciaal voor hen van belang zijn en over de didactiek van het vak. Dat plan heeft echter alleen kans van slagen, als de docenten uit het middelbaar onderwijs meewerken en mensen met onderwijspraktijk en doceerervaring de leiding nemen. Het beste zal zijn, indien op dit gebied samenwerking tussen hoger en middelbaar onderwijs tot stand komt, waarbij universitaire docenten de door de leraren aangevraagde theoriën en problemen behandelen en omgekeerd van hen vernemen, op welke zaken zij in hun colleges de nadruk moeten leggen. Samen kunnen ze overleg plegen over eventuele wijzigingen in het leerprogramma van het wiskundeonderwijs op de middelbare scholen.

Het laatste punt luidt: onderzoek. Zij, die aan het Mathematisch Centrum verbonden zijn, verrichten onderzoekingen, hetzij op eigen initiatief, hetzij in opdracht van anderen. De Staat, de industrie, de techniek, laboratoria, maatschappijen, particulieren, zij allen kunnen het Centrum verzoeken een bepaald wiskundig onderzoek uit te

voeren. Is het een kwestie van louter rekenwerk, bijvoorbeeld de berekening van de wortels van een vergelijking van de twaalfde graad in een aantal decimalen nauwkeurig, dan kan die taak aan een rekenaar worden opgedragen. Betreft het echter een diepgaand wetenschappelijk onderzoek, dan zal de uitvoering worden toevertrouwd aan het wetenschappelijk personeel en het ligt dan ook in het voornemen alle productieve Nederlandse wiskundigen (dit woord genomen in de meest uitgebreide zin van het woord), van wie verwacht mag worden dat ze als medewerkers nuttig werk zullen verrichten, op de een of andere wijze aan het Mathematisch Centrum te verbinden.

Natuurlijk is voor dit alles een instituut nodig, met gehoorzalen, werkkamers en bibliotheek. Nieuw voor ons land is, dat dat instituut, althans zo het beantwoordt aan de bedoeling van de stichters, te zijner tijd uitgerust zal worden met mathematische machines. Ik zeg te zijner tijd, want Nederland is in dit opzicht achter. Een of meer jonge mathematici met technische bekwaamheid zullen de in het laatste decennium elders geconstrueerde machines gaan gebruiken en bestuderen; teruggekeerd, zullen ze aangeven, hoe die machines met de allermodernste verbeteringen hier kunnen worden gebouwd en benut.

In de oorlogstijd zijn in Amerika mechanische hersens geconstrueerd, wier prestaties aan het ongelooflijke grenzen. Hierboven noemde ik U reeds de Eniac, de „electronic numerical integrator and computor" in Pennsylvania, die alles kan uitrekenen en in twee uur het werk verricht, waarvoor honderd geoefende rekenaars een jaar nodig hebben. Bij een onlangs gehouden demonstratie hebben de uitvinders, Dr. John W. Mauchly and J. Presper Eckert, laten zien dat men de baan van een bom in minder tijd kan berekenen, dan de bom nodig heeft om zijn doel te bereiken. Of de toehoorders dat een geruststellend idee vonden, weet ik niet, maar in ieder geval heeft de nieuwe machine daarmede haar superioriteit boven haar voorgangsters bewezen. In de sprookjes zijn het de kabouters, die voor ons het werk verrichten, maar hier zijn het de aalgladde, vliegensvlugge electronen, die door vacuumbuizen schietend, al maar door op commando optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen in duizelingwekkende vaart. Welk rekenwerk is te zwaar voor deze kaboutertjes, die twee getallen van tien cijfers in een vijfduizendste seconde optellen?

Maar ginds verneem ik ooren,
Die, na het laatste woord, graag nog een laatster hooren.

Want wat heeft nu de industrie hiermee te maken? Welnu, tot de industrie en het zakenleven zeg ik: tua res agitur; het Mathematisch Centrum is ook Uw zaak. Niet alleen ter wille van de genoemde opdrachten, want misschien bezit U reeds een wiskundige afdeling, zodat U daarvoor de nieuwe stichting niet nodig hebt. Maar in ieder geval hebt U er belang bij, dat in Nederland voor wiskundigen een diepgaande en brede opleiding komt, waarbij in het bijzonder aandacht aan de praktijk geschonken wordt, terwijl hun daarnaast de gelegenheid geboden wordt economische of industriële ervaring op te doen of zich in de ingenieurs- of natuurwetenschappen te oefenen. Verwacht mag dan worden, dat degenen onder hen, die over capaciteiten beschikken en een praktische blik hebben, later in de industrie en de techniek nuttig werk zullen verrichten door het uitvoeren van onderzoekingen, het maken van berekeningen en het geven van adviezen. Met desiderata van de praktijk zal dan ook bij de opleiding zeker rekening gehouden worden.

De stichters van het Mathematische Centrum streven naar een bloei van de zuivere en toegepaste mathesis in Nederland. Zij zijn er van overtuigd, dat de theoretische wiskunde er geen schade van zal ondervinden, zo haar zuster meer belangstelling gaat genieten. Immers, zij zal toch voortdurend moeten bijspringen en slaagt zij er in voor haar zuster een probleem op te lossen, dan weeft ze er zelf een theorie omheen, zodat beide hebben, wat ze wensen: de een heeft de theorie, de andere het opgeloste probleem. Trouwens blonken de allergrootsten, Archimedes, Newton, Gauss niet op beide gebieden uit?

Ik weet niet, of Gulliver na zijn avontuurlijke reizen nog lust heeft een vijfde zwerftocht te ondernemen. Is dat het geval, dan nodig ik hem uit om over tien jaar het Mathematisch Centrum te bezoeken. Ik durf hem niet te garanderen, dat ik dan, zoals met Laputa geschiedde, het Instituut vlak bij hem zal neerzetten, maar in ieder geval ben ik bereid hem met een vliegmachine te laten halen. Van zijn kritiek zal ik me niet veel aantrekken, maar ik vertrouw, dat hij een groep onderzoekers zal vinden, die in harmonie en vol geestdrift hun talenten schenken aan de beoefening van de wetenschap en ik hoop, dat hij vooral jonge werkers zal aantreffen, want juist de jeugd hebben we nodig.

VAN DE PERSONEN.

Dr H. J. E. Beth heeft met Kerstmis 1945 zijn loopbaan bij het M.O. beëindigd.

Beth studeerde te Amsterdam van September 1899—1904, promoveerde cum laude op proefschrift: Over de principale trillingen, enz. bij Prof. Korteweg op 4 Nov. 1910. Hij werd leraar in Almelo op 1 Dec. 1905, was directeur van 1 Sept. 1915 tot 1 Aug. 1922, daarna directeur in Deventer tot 1 Febr. 1935 en sinds dien in dezelfde betrekking werkzaam in Amersfoort.

Hij schreef in de Historische Bibliotheek: Inleiding tot de Niet-Euclidische meetkunde op historische grondslag, en Newton's Principia; voorts Inleiding tot de Differentiaal- en Integraalrekening; verder een groot aantal tijdschriftartikelen en een paar schoolboeken.

Verder was hij voorzitter van de commissie, die in 1926 een nieuw leerplan voor de H.B.S. B opstelde; zoals de lezers weten, is daarover nog al wat te doen geweest.

Als geleerde heeft hij zijn sporen verdiend; Dr Beth heeft nl. op zijn naam staan de bekroning van niet minder dan 14 prijsvragen van het Wiskundig Genootschap en is dus lid van verdienste van het Genootschap.

Prof. Dr. S. C. VAN VEEN.

Bij K.B. van 27 December 1945 is benoemd tot gewoon hoogleraar in de Afdeling der Algemene Wetenschappen aan de Technische Hogeschool te Delft om onderwijs te geven in de zuivere en toegepaste wiskunde en de mechanica, Dr. Simon Cornelis van Veen, leraar aan de Chr. H. B. S. te Dordrecht.

Dr. van Veen werd op 8 Juni 1896 te Rotterdam geboren. Hij doorliep de H. B. S. en werd in 1914 ingeschreven als student aan de Technische Hogeschool in de Afdeling der Electrotechniek, deed in 1916 zijn propaedeutisch examen en behaalde in hetzelfde jaar de middelbare acten K I, K II en K V. In 1917 begon hij, gebruik makend van de door de wet-Limburg geboden mogelijkheid, te studeren in de wis- en natuurkunde aan de Rijks-Universi-

teit te Leiden, legde in 1920 het candidaats- en in 1922 het doctoraal-examen af en was van 1919 tot 1921 assistent voor theoretische physica bij Prof. Ehrenfest. In 1927 promoveerde hij te Leiden tot doctor in de wis- en natuurkunde op het proefschrift „Periodieke oplossingen in commensurabiliteitsgebieden, met toepassing op het probleem der lacunes in het stelsel der asteroïden". Promotor was Prof. Dr W. de Sitter. In 1921 was hij benoemd tot leraar aan de Chr. H. B. S. te Dordrecht, welke betrekking hij dus bijna een kwart eeuw heeft vervuld.

Na zijn candidaatsexamen had Van Veen zich speciaal toegelegd op de algemene theorie der complexe functies en op de studie van bijzondere functies, zoals de Zeta-functie van Riemann, en verder op de hemels-mechanica. Na zijn doctoraal-examen werd dit voortgezet en daarnaast uitvoerig studie gemaakt van asymptotische ontwikkelingen en van verschillende gebieden der getallentheorie. Sinds zijn promotie heeft Dr. van Veen zich onder meer bezig gehouden met de moderne integraaltheorie, de reeksen van Fourier, de potentiaaltheorie, integraalvergelijkingen, niet-Euclidische meetkunde en verzamelingsleer.

Een groot aantal publicaties is van zijn hand verschenen.

Op 28 Februari 1946 heeft Prof. van Veen zijn ambt aanvaard met het uitspreken van een rede: „Zuivere en toegepaste wiskunde en haar betekenis voor den ingenieur."

Didactiek van de natuurkunde aan de Rijksuniversiteit te Utrecht.

Prof. Dr Minnaert heeft jaren lang in Utrecht de didactiek van de natuurkunde onderwezen; hij is opgevolgd door den Heer Reindersma; wegens reismoeilijkheden heeft deze de colleges slechts gedurende enkele maanden kunnen geven.

Thans worden de lessen gegeven door Drs. G. H. Frederik, leraar aan het Gymnasium te Leiden, volgeling van Prof. Minnaert.

KORREL.

LXVII.

Eenhedenstelsels in de Mechanica.

Om althans ten deele tegemoet te komen aan de bezwaren, die de onvolledigheid van het schooljaar in den cursus 1944—1945 met zich meebracht, heb ik in dien cursus bij het onderwijs in Mechanica een proef genomen met een hervorming van de gebruikelijke eenhedenstelsels. De gunstige resultaten, welke deze proef opleverde, hebben mij aanleiding gegeven, de ingevoerde wijziging ook in den loopenden cursus toe te passen. Met het oog op de mogelijkheid, dat ook anderen hun onderwijs in denzelfden zin zouden willen vernieuwen, deel ik hieronder er het een en ander over mede.

De aangebrachte hervorming bestaat in de radicale afschaffing van de statische eenhedenstelsels en in de invoering van het z.g. groot dynamische of MKS-stelsel (meter-kilogram-secondestelsel) naast het, ook als klein-dynamisch aan te duiden, CGS-stelsel.

In het MKS-stelsel [1]) zijn de grondeenheden van dezelfde soort als in het CGS-stelsel; ze onderscheiden zich daarvan alleen door de grootte. Het zijn opv. meter en seconde voor lengte en tijd, waarnaast dan de kilogram komt als eenheid van massa. De bijbehoorende eenheid van kracht, de Newton (N), wordt dan gedefinieerd als de kracht, die aan een stoffelijk punt, waarvan de massa 1 kg bedraagt, de versnelling 1 m/sec^2 meedeelt.

Men vindt $\qquad 1 \text{ N} = 10^5$ dyne.

De correspondeerende eenheden voor arbeid (en energie) en arbeidssnelheid zijn 1 Nm = 10^7 erg = 1 J en 1 W.

Als voordeelen van de methode kunnen worden genoemd:

a) De noodzaak om de statische stelsels, waarin niet langer de eenheid van massa, maar die van kracht, grondeenheid is, te leeren, vervalt.

b) In het bijzonder verdwijnen de steeds als onnatuurlijk gevoelde klein- en grootstatische massa-eenheid, terwijl de kilogram hersteld wordt in haar natuurlijke functie van massa-eenheid, waarin een groot aantal leerlingen (ditmaal door een juist instinct geleid) haar toch altijd, maar dan ten koste van foutieve uitkomsten, wilde gebruiken.

c) de Joule komt op ongedwongen wijze als eenheid van arbeid

---

[1]) Men kon over dit stelsel raadplegen H. A. C. Denier van der Gon, *Vereenvoudiging van physische maatstelsels.* Faraday XIII (1942—1943), p. 113 vlg.

en energie voor den dag, waardoor de aansluiting aan de in de electriciteitsleer gebruikelijke eenheden wordt vergemakkelijkt.

Een consequentie van de invoering van het MKS-stelsel is natuurlijk, dat de kg als eenheid van kracht, de kgm als eenheid van arbeid en energie en de pk als eenheid van arbeidssnelheid komen te vervallen. Ik beschouw dit als zuivere winst. Men kan er echter ook een bezwaar in voelen, omdat de leerlingen deze eenheden reeds kennen uit de eerste ronde van het natuurkundeonderwijs. Dit bezwaar is practisch echter uiterst gering; men vindt immers de betrekking

$$1 \text{ kg} = g \text{ N} (g \text{ in m/sec}^2)$$

die in vele gevallen practisch te benaderen is door

$$1 \text{ kg} = 10 \text{ N}.$$

De Newton blijkt dus ongeveer 1 hg te zijn, deze opmerking draagt er toe bij, haar aanschouwelijke beteekenis in het licht te stellen, terwijl de vermelde betrekking in staat stelt, alle vraagstukken, waarin een kracht in kg gegeven is, in het nieuwe stelsel over te brengen. Mijn ervaring is, dat deze overbrenging door de leerlingen sneller wordt aangeleerd en met minder fouten wordt uitgevoerd dan tot dusver bij de omrekening van een in kg gegeven massa op statische eenheden het geval was. Zooals vanzelf spreekt vervalt ook de onnatuurlijke toestand, dat eenzelfde naam, kilogram, voor twee verschillende soorten eenheden, namelijk van kracht en van massa, dienen moest; de door vele schrijvers van leerboeken gevoelde noodzaak, de steeds dreigende verwarring van deze twee eenheden te voorkomen door kilogramkracht en kilogrammassa te onderscheiden was op zich zelf reeds een bedenkelijk symptoom van de bestaande onredelijkheid.

Voorzoover men het boven aangewezen bezwaar wèl ernstig zou willen vinden, kan er op gewezen worden dat het meer op rekening van de traditie komt dan op die van de bepleite vernieuwing. Het naast elkaar gebruiken van dynamische en statische eenhedenstelsels is niets anders dan een van de vele voorbeelden van het betreurenswaardig menschelijk conservatisme op het stuk van eenheden, dat in wetenschap, practijk en onderwijs al zooveel onheilen heeft aangericht en nog voortdurend aanricht. Naar mijn meening heeft in deze zaken het onderwijs niet na te volgen hetgeen de traditie met zich meebrengt, maar integendeel voor te gaan op den weg naar de rationaliseering. Onpractische of onlogische eenheden, eenmaal aangeleerd, blijven uit sleur en gemakzucht behouden. Er is geen andere weg om ze te verdrijven, dan ze niet meer te onderwijzen.

E. J. DIJKSTERHUIS.

BOEKBESPREKINGEN.

Unterrichtswerk des Vereins schweizerischer Mathematiklehrer. Orell-Füssli Verlag, Zürich.

Dr. P. Buchner, Leitfaden der Algebra IV, 1944, 237 bldz., prijs Fr. 5,20.

Dr. F. Stähli & Dr. F. Meyer, Aufgabensammlung der Algebra.

III, [1939], 131 bldz., prijs Fr. 2,80.

IV, [1945], 172 bldz., „ Fr. 3,60.

Dr. F. Gonseth & Dr. P. Marti, Aufgabensammlung der Planimetrie [1939], 154 bldz.. prijs Fr. 3.—.

Dr. E. Mettler & Dr. E. Vaterlaus, Aufgabensammlung der Stereometrie [1940], 139 bldz., prijs Fr. 2,85.

Dr. E. Leutenegger, Leitfaden der ebenen Trigonometrie [1940], 107 bladz., prijs Fr. 2,80.

Dr. H. Flükiger †, Leitfaden der darstellenden Geometrie. 1943, 216 bldz., prijs Fr. 6,80.

Dr. K. Dändliker, Aufgabensammlung der darstellenden Geometrie. [1945], 148 blz., prijs Fr. 3,30.

De voor den oorlog verschenen deelen van het Unterrichtswerk zijn reeds eerder in „Euclides" besproken (XV, 44 en XIII, 166). Het vierde deeltje van de theorie der algebra behandelt in hoofdzaak de differentiaal- en integraalrekening, maar bevat bovendien eenige onderwerpen, die daarmede in meer of minder nauw verband staan. Na een korte inleiding over de uitbreiding van het getalbegrip tot en met de reëele getallen volgt een uitvoerig hoofdstuk over complexe getallen en binomiale vergelijkingen. Daarna komen de limieten van varianten en de oneindig voortloopende reeksen ter sprake (met onderwerpen als alterneerende reeksen, convergentiekenmerk van d'Alembert, absolute convergentie). In een volgend hoofdstuk wordt het functiebegrip besproken, vooral met het oog op meerwaardige functies en op impliciete functies, daarna worden de limietwaarden van functies en de continuiteit behandeld. Dan begint de behandeling der eigenlijke differentiaalrekening, met het differentieeren van sommen en producten, gevolgd door de eigenschappen der geheele rationale functie. Daarna volgt een lang hoofdstuk over vergelijkingen, waarin o.a. ter sprake komen de reststelling, de rekenwijze van Horner, ontbinding in lineaire factoren, meervoudige wortels, benadering van irrationale wortels, stelling van Rolle, het een en ander over nomographie, regula falsi, benaderingsmethoden van Newton en van Fourier. De behandeling van de integraalrekening begint met eene, door vele voorbeelden en toepassingen verduidelijkte, invoering van de begrippen bepaalde en onbepaalde integraal; daarna wordt de behandeling der integraalrekening onderbroken en komen de gebroken rationale functies en de algebraïsche functies ter sprake, waarbij het theorema der samengestelde functie, en het differentieeren van quotienten worden behandeld. Daarna keeren de schrijvers tot de integraalrekening terug, en bespreken de integratie door substitutie, en de substitutie in bepaalde integralen. Het slot van het werkje wordt gevormd door hoofdstukken over trigono-

metrische en cyclometrische functies, over benadering van functies door veeltermen, reeks van Taylor, machtreeksen, logarithmische en exponentieele functies, en enkele toepassingen, ontleend aan wiskunde en natuurwetenschappen. Ik heb den inhoud eenigszins uitvoerig medegedeeld om den lezers een indruk te geven van den grooten omvang van het algebra-onderwijs aan de Zwitsersche „höhere Mittelschulen" waarvoor dit Unterrichtswerk bestemd is. De bewerking is zeer nauwkeurig en duidelijk.

De beide deelen met vraagstukken geven na het bovenstaande geen aanleiding tot bijzondere bespreking. Zooals te verwachten is, vindt men er naast vele vraagstukken van dezelfde soorten als wij hier te lande gewoon zijn te behandelen, een groot aantal veel moeilijker opgaven. Zoo bevat het derde deel naast allerlei eenvoudige vragen over reken- en meetkundige reeksen en samengestelde-intrestrekening een menigte vraagstukken over waarschijnlijkheidsrekening, levensverzekeringswiskunde en foutenrekening. Een in 't oog springende eigenaardigheid is het groote aantal zeer eenvoudige opgaven (Vraagstuk 1 van deel IV vraagt b.v. de absolute waarde van 20 verschillende complexe getallen te berekenen).

De deeltjes over planimetrie en stereometrie gelijken veel meer op onze Nederlandsche vraagstukkenverzamelingen dan dit met de algebraboeken het geval is. Hetzelfde kan men zeggen van de theorie der trigonometrie; een merkwaardig verschilpunt is echter, dat in het Zwitsersche boek eerst de trigonometrie en daarna de goniometrie wordt behandeld. En dàn treden de practische toepassingen der meetkunde wat meer op den voorgrond dan bij ons.

Groote verschillen met de Nederlandsche leerboeken vertoonen echter weer de deelen over beschrijvende meetkunde. Het theorieboek, dat bijzonder fraai uitgevoerd is, bevat drie afdeelingen, de eerste behandelt de loodrechte projectie op één vlak, de tweede, grootste, de loodrechte projectie op twee of drie onderling loodrechte vlakken, de derde eenige korte aanwijzingen over axonometrie en perspectief. In de eerste afdeeling vindt men vrij uitvoerige beschouwingen over de ellips en over den drievlakshoek. De tweede afdeeling bevat naast de bij ons gebruikelijke onderwerpen, uitweidingen over projectieve meetkunde, doorsnijdingen van veelvlakken en een zeer uitvoerige behandeling van kegel, cylinder en bol met vlakke doorsneden, doordringingen en schaduwconstructies. De scheeve cirkelkegel en de vlakke doorsneden daarvan worden behandeld, evenals de vlakke projectieve meetkunde der kegelsneden (stellingen van Pascal en Brianchon).

Het mathematische Unterrichtswerk für höhere Mittelschulen is hiermede nog niet compleet: een vraagstukkenverzameling voor trigonometrie zal nog verschijnen, evenals theorie en vraagstukken over analytische meetkunde. Deze verzameling leerboeken maakt den indruk, met veel zorg geschreven te zijn, en bevat vele theoretische opmerkingen en vraagstukken, waarmede de Nederlandsche leeraar zijn voordeel zou kunnen doen, als hij den tijd had, zich in didactische en methodische quaesties te verdiepen. Het werk geeft een hoogen indruk van het wiskunde-onderwijs in Zwitserland. J. H. S.

Roland Deaux. Compléments de Géométrie Plane. 156 pages, A. de Boeck, Bruxelles, 1945.

De wens van de Redactie, een bespreking van dit boek in „Euclides" op te nemen, zie ik als een nieuw blijk van haar streven, de banden, die ons reeds van nature met onze zuidelijke naburen verbinden, ook in cultureel opzicht te versterken. Ik beschouw het ook daarom als een voorrecht, dat de Redactie mij het boek tot bespreking voorlegde. Dit voorrecht wordt tot een onverdeeld genoegen, nu ik er, zelfs als ik het met vijandige gevoelens was genaderd, niets dan goeds van zou kunnen zeggen.

De „Compléments" zijn bedoeld enerzijds als een bekroning van een elementaire meetkundige cursus, die weinig van onze gewone schoolmeetkunde afwijkt, anderzijds als inleiding tot de analytische en de projectieve meetkunde.

In een eerste hoofdstuk, dat de eigenschappen van lijnsegmenten behandelt, vindt men de bewijzen van de stellingen van Menelaos en Ceva, en, na de invoering van de dubbelverhouding, die van Pappus, Pascal en Brianchon, de laatste twee voor zeshoeken, opv. in en om een cirkel beschreven. Het tweede hoofdstuk geeft eigenschappen van cirkels: pool en poollijn, machtlijnen, cirkelbundels. Het derde en laatste hoofdstuk behandelt twee transformaties: de homothetie en de inversie. Het boek wordt besloten met een verzameling van 383 vraagstukken, gerangschikt volgens de behandelde onderwerpen.

Van het hier genoemde vindt men weinig of niets in onze schoolboeken; alle genoemde onderwerpen worden uitvoerig behandeld in grotere werken, als Molenbroek, Leerboek der Vlakke Meetkunde, en Schuh, Leerboek der Nieuwere Meetkunde, maar ik geloof, dat deze werken vooral gebruikt worden door studerenden voor de lagere en de middelbare acte. Vermoedelijk zijn er niet veel aankomende studenten, die zich met behulp van deze boeken vollediger voorbereiden voor wat aan Universiteit of Technische Hogeschool op wiskundig gebied zal worden aangeboden; men kan dat slechts betreuren. Men moet de Belgische studenten gelukkig prijzen, die gehouden zijn door een bestudering van het nu aangekondigde boek zich een inleiding tot hun verdere studie te verschaffen; een examen opent hun de toegang tot de polytechnische faculteit.

De bekende schrijver, hoogleraar aan de polytechnische faculteit te Mons, bouwt zijn boek op op het door Chasles uitgesproken beginsel, dat in het algemeen de stellingen niet volledig zijn, indien men niet het principe van het + en — teken heeft ingevoerd. Hij gaat dus uit van de betrekking van Möbius, die zegt, dat als A, B en C drie punten op een rechte zijn,

$$AB + BC + CA = 0.$$

Dit doet hij, nadat hij het begrip van de algebraische waarde van een lijnsegment heeft ingevoerd. Karakteristiek voor de schrijftrant van Deaux is reeds dadelijk de nauwgezette wijze, waarop dit gebeurt. Hij gebruikt dit tekenbeginsel eerst om aan enkele stellingen, uit het elementaire programma bekend, een algemene vorm te geven.

Als eerste deugd roemde ik al de nauwgezetheid, die voortdurend bij de lezing weldadig aandoet. Als tweede deugd moet ik noemen de grote duidelijkheid, waardoor alle moeilijkheden voor den leerling overwonnen zijn. Wie hierin een gebrek ziet, kan ik wijzen op de prachtige verzameling opgaven, van welke vele me oorspronkelijk schijnen; ik

denk, dat aan menige opgave ook de Belgische studenten de handen vol zullen hebben.

Ik heb me zelf afgevraagd, waarom de schrijver onder de verhouding, waarin een punt M een lijnsegment AB verdeelt, verstaat $\frac{AM}{MB}$ en niet $\frac{MA}{MB}$; ik geloof, dat het laatste bepaalde voordelen biedt, en meende, dat het zo vrij algemeen in gebruik is. Echter wil ik er geen bezwaar van maken, want de schrijver heeft blijkbaar alles zo goed doordacht, dat hij ook hiervoor wel zijn goede redenen zal hebben.

Ik beveel dit met grote zorg en liefde samengestelde en met grote helderheid geschreven boek gaarne in de belangstelling van de lezers van dit tijdschrift aan.

H. J. E. BETH.

Tekst ter introductie van V 1420, 2e ontwerp.

De Hoofdcommissie voor de Normalisatie in Nederland maakt bekend, dat het ontwerp-normaalblad V 1420, Symbolen voor de Wiskunde. Beschrijvende Meetkunde, in 2e lezing ter critiek is afgekondigd.

Dit 2e ontwerp is door Commissie B_0 (Algemeene aanwijzingen voor technische geschriften), onder voorzitterschap van prof. dr. M. de Haas, Oud-Hoogleeraar aan de Technische Hoogeschool te Delft, opgesteld om tegemoet te komen aan eenige bezwaren, welke tegen het eerste ontwerp [1]) waren ingebracht.

Vergeleken bij dat eerste ontwerp is in de nieuwe lezing, ter nauwere aansluiting aan het internationale gebruik, voor het aanduiden van de elementen eener constructie het Grieksche alfabet naast het Latijnsche opgenomen.

De regels voor het gebruik van accenten en aanwijzers in de rechthoekige projectie zijn om practische redenen in dien zin gewijzigd, dat de eerste voor het aanduiden der projecties zijn bestemd, de laatste voor het aanduiden van een aantal gelijksoortige elementen. Het tweede hoofdstuk werd uitgebreid met enkele regels voor de vrije centrale projectie.

Met betrekking tot het derde hoofdstuk bleek beperking in het normaliseeren van details voorshands gewenscht, weshalve het voorschrijven van de kleuren, waarin de verschillende onderdeelen van een gereed gekomen constructie bij het opwerken kunnen worden onderscheiden, is achterwege gelaten. Aan de regels met algemeene strekking werden eenige toegevoegd.

Het eenvoudige voorbeeld op de achterzijde van het blad is voornamelijk ten behoeve van het Middelbaar- en het Nijverheidsonderwijs opgenomen.

Het blad is verkrijgbaar bij de Uitgeverij Waltman, Hippolytusbuurt 4, Delft en bij den boekhandel tegen den prijs van 16 cent per stuk, franco; omtrent prijsvermindering bij afname ineens van een groot aantal exemplaren verstrekt genoemde uitgeverij nadere inlichtingen.

Opmerkingen worden gaarne ingewacht door het Centraal Normalisatiebureau, Lange Houtstraat 13a, 's-Gravenhage, telefoon 111528.

---

[1]) Jg. 19, 1942/43 blz. 61.

HOOFDCOMMISSIE VOOR DE NORMALISATIE IN NEDERLAND (H.C.N.N.)

2e ontwerp | DECEMBER 1943

I. REGELS VOOR HET AANDUIDEN VAN PUNTEN, LIJNEN EN VLAKKEN IN RECHTHOEKIGE PROJECTIE *)

1. De drie projectievlakken, horizontaal projectievlak, verticaal projectievlak en 3e projectievlak genoemd, worden achtereenvolgens aangeduid hetzij met τ_1, τ_2 en τ_3, hetzij met V_1, V_2 en V_3, hetzij met xOy-vlak, xOz-vlak en yOz-vlak.
2. De snijlijn van het horizontale en het verticale projectievlak heet x-as: de snijlijn van het horizontale en het 3e projectievlak heet y-as; de snijlijn van het verticale en het 3e projectievlak heet z-as.
3. De tweevlakshoek, gelegen boven het horizontale projectievlak en vóór het verticale projectievlak is de 1e tweevlakshoek; die gelegen boven het horizontale projectievlak en achter het verticale projectievlak is de 2e tweevlakshoek; de overstaande van de 1e is de 3e tweevlakshoek, de overstaande van de 2e is de 4e tweevlakshoek. De tweevlakshoeken worden achtereenvolgens aangeduid met I, II, III, IV.
4. Punten worden aangeduid met Latijnsche hoofdletters.
   Voorbeelden: A, B, C, ... P, Q ....
5. Lijnen worden aangeduid met Latijnsche kleine letters; bij regelvlakken worden deze voorzien van aanwijzers.
   Voorbeelden: a, b, c ... l, m; a_1, a_2, a_3 ..., b_1, b_2, b_3 ...
6. Projecties van punten en lijnen op de projectievlakken worden gekenmerkt door hun letteraanduidingen te voorzien van accenten. De aanduiding van een projectie op het horizontale vlak geschiedt met één accent, die op het verticale vlak met een dubbel accent en die op het 3e projectievlak met een drievoudig accent.
   Voorbeelden: A', A'', A'''; a', a'', a'''; a_1', a_1'', a_1'''.
7. Punten en lijnen welke in de projectievlakken liggen, behoeven in hun aanduiding niet van accenten te worden voorzien.
8. Vlakken worden aangeduid met Latijnsche hoofdletters of met Grieksche kleine letters. Deze worden geplaatst bij het snijpunt met de x-as; bij de horizontale en verticale doorgang wordt dezelfde letter geplaatst, onderscheidenlijk met de aanwijzers 1 en 2.
   Voorbeelden: U, W, α, β, ϱ (raakvlak), σ (snijvlak), π (parallelvlak), μ (meridiaanvlak); U_1, U_2, α_1, α_2.
9. Elementen, welke zijn neergeslagen in een der projectievlakken worden gekenmerkt door aan hun letteraanduiding den aanwijzer n toe te voegen.
   Voorbeelden: P_n, a_n, l_n, $W_{1,n}$, $\beta_{1,n}$.

II. REGELS VOOR HET AANDUIDEN VAN PUNTEN, LIJNEN EN VLAKKEN IN AXONOMETRISCHE EN SCHEEVE PROJECTIE EN IN PERSPECTIEF

1. Bij de *axonometrische projectie* worden de coördinaatvlakken aangeduid hetzij met τ_1, τ_2 en τ_3, hetzij met xOy-, xOz- en yOz-vlak. Het tafereel wordt aangeduid met τ.
   Bij de gebruikelijke methode van *scheeve projectie* is $\tau = \tau_2$.
2. De rechthoekige projecties van punten en lijnen op de coördinaatvlakken alsmede de doorgangen van vlakken worden op dezelfde wijze aangeduid als onder I is aangegeven. De aanduidingen van axonometrische projecties behoeven niet van accenten en die van axonometrische doorgangen niet van aanwijzers te worden voorzien. Van een element dat tot in het tafereel is gewenteld wordt de aanduiding voorzien van den aanwijzer n.
3. Bij de *gewone perspectief* wordt het tafereel aangeduid met τ, het grondvlak met τ_1, de horizon met HZ, de grondlijn met GL. Rechthoekige projecties op τ_1 worden aangeduid met één accent; de doorgang van een vlak met τ_1 krijgt den aanwijzer 1. Rechthoekige projecties op τ worden aangeduid met een dubbel accent of den aanwijzer I, bv.: A'' of A_I, a'' of a_I. Het hoofdpunt (oogpunt) wordt aangeduid met O'', O_I of P.
   Centrale projecties op τ en doorgangen van vlakken met τ krijgen onderscheidenlijk geen accenten of aanwijzers.
4. Bij de *vrije centrale projectie* worden de projecties van punten en lijnen voorzien van één accent; het doorgangspunt en het vluchtpunt van een rechte a worden onderscheidenlijk aangeduid met D_a en V_a; de doorgang en de vluchtlijn van een vlak α worden onderscheidenlijk aangeduid met d_α en v_α.

III. LIJNSOORTEN VOOR HET AANDUIDEN VAN PUNTEN, LIJNEN EN VLAKKEN *)

Na voltooiing van een constructie, bij welke aanvankelijk alle lijnen zijn aangegeven door doorloopende dunne potloodlijnen, kan de teekening als volgt worden opgewerkt.

1. Assen (eventueel de positieve deelen der assen), zichtbare lijnen en doorgangen worden aangeduid met een dikke lijn.
2. Onzichtbare lijnen worden aangeduid met een gestreepte lijn, waarvan de dikte naar keuze dezelfde of ongeveer de helft is van de onder III 1 genoemde lijn.
3. Verbindingslijnen van twee rechthoekige projecties van hetzelfde punt worden aangeduid met een gestreepte lijn, waarvan de dikte ongeveer een vierde bedraagt van de onder III 1 genoemde lijn.
4. Constructielijnen worden aangeduid met een lijn, waarvan de dikte ongeveer een vierde bedraagt van de onder III 1 genoemde lijn.
5. Hartlijnen worden aangeduid met een streep-stiplijn, waarvan de dikte ongeveer een vierde bedraagt van de onder III 1 genoemde lijn.
6. Ontwikkelingen en uitslagen worden aangeduid met lijnen, waarvan de dikte ongeveer de helft bedraagt van de onder III 1 genoemde lijn.
7. Vlakke doorsneden en projecties daarvan worden met een zwarte of gekleurde arceering aangegeven.
8. Onderdeelen van een samengestelde constructie mogen met lijnen van verschillende kleur worden aangegeven.

*) Zie het voorbeeld op de achterzijde van dit blad.

Nog niet definitief. Verzoeke critiek in te zenden

SYMBOLEN VOOR DE WISKUNDE

BESCHRIJVENDE MEETKUNDE

V 1420

F.I.D.: 003

HET GENOOTSCHAP VOOR GESCHIEDENIS DER GENEESKUNDE, WISKUNDE EN NATUURWETENSCHAPPEN.

Men kan niet zeggen dat in het algemeen onder de beoefenaren van de wis- en natuurkundige wetenschappen groote belangstelling wordt aangetroffen voor de geschiedenis van deze vakken. Is reeds het aantal dergenen, die zich meer terloops en dilettantisch met geschiedkundige vragen bezighouden, niet groot, het aantal wetenschappelijke beoefenaars is in ieder land al zeer beperkt. Wanneer dan ook deze belangstellenden zich willen vereenigen om de studie die hun lief is te bevorderen, zijn zij te weinig talrijk om dit alleen te doen en zeker is dit het geval in een klein land als het onze; het ligt dus voor de hand, dat zij zich aansluiten bij hen die in andere min of meer verwante wetenschappen — in casu de geneeskundige — een overeenkomstige plaats innemen. Aan deze overwegingen dankt het Genootschap, welks naam hierboven staat vermeld, zijn ontstaan.

Het was in het voorjaar van 1913 dat Prof. Dr. E. C. van Leersum en Dr. J. A. Vollgraff belangstelling trachtten te wekken voor de oprichting van een vereeniging voor de geschiedenis van de geneeskunde en van de wis- en natuurkundige vakken. Spoedig daarna kwam deze tot stand onder den naam „Vereeniging voor Geschiedenis der Genees-, Natuur- en Wiskunde"; de reeds bestaande Nederlandsche Vereeniging voor Geschiedenis der Geneeskundige Wetenschappen werd erin opgenomen. De eerste voorzitter werd Prof. van Leersum, secretaris Dr. Vollgraff, terwijl ook o.a. Prof. Dr. Ernst Cohen zitting had in het Bestuur. In 1928 werd de naam veranderd in „Genootschap voor Geschiedenis der Genees-, Natuur- en Wiskunde"; sindsdien is hij nogmaals gewijzigd en is hij vastgelegd als hierboven is aangegeven.

Onder de leden van het Genootschap zijn de beoefenaars der wis- en natuurkundige wetenschappen, waarbij ook de biologie en de techniek zijn inbegrepen, goed vertegenwoordigd; het Bestuur waakt ervoor, dat ook aan deze gebieden de noodige aandacht wordt geschonken en bij het vervullen van vacatures in het Bestuur wordt steeds met het vak van studie rekening gehouden. Voorzitter is thans Dr. A. Schierbeek, de bekende historicus der biologie, lid van de Leeuwenhoek-commissie der Koninklijke Academie van

Wetenschappen en privaat-docent in de geschiedenis der biologie aan de Universiteit te Leiden. Het secretariaat is sedert 1934 in handen van Dr. D. Burger (Statensingel 183a, Rotterdam-C). Van zijn hand verscheen ter gelegenheid van het 25-jarig bestaan van het Genootschap een overzicht van de werkzaamheden in dit tijdvak [1]; verschillende gegevens in dit opstel zijn daaraan ontleend. Te betreuren is, dat juist in de exacte vakken enkele zeer vooraanstaande figuren zich afzijdig houden.

Waarin bestaan nu de werkzaamheden van het Genootschap? In de eerste plaats in het houden van wetenschappelijke vergaderingen, die, gewoonlijk gecombineerd met een huishoudelijke vergadering, volgens Art. 11 van het Huishoudelijk Reglement minstens tweemaal per jaar moeten worden gehouden (voorjaars- en najaarsvergadering). Ze hebben gewoonlijk plaats op een Zaterdagavond en den daarop volgenden Zondag; alleen in de oorlogsjaren heeft men de bijeenkomsten tot één dag beperkt. De plaats der vergadering was de laatste jaren steeds Leiden of Utrecht; te Leiden was het dan het Academisch Ziekenhuis, waar door de goede zorgen van den Geneesheer-directeur Dr. H. H. Maas het Genootschap steeds een gastvrije ontvangst genoot. Maar ook in andere steden hadden de vergaderingen plaats; een bepaalde traditie had vroeger in dit opzicht Gorinchem, dat middelpunt van de medisch-historische wetenschap, waar Dr. J. G. de Lint en Dr. M. A. van Andel werkten, alsmede Dr. H. J. Lulofs, een classicus, die groote belangstelling had voor de oude geneeskundige literatuur; in 1938 werd te Gorinchem ook het 25-jarig bestaan gevierd. De lezingen, die worden gehouden, zijn meestal kort, maar verscheidene in aantal. Bekende sprekers hebben hier vaak belangrijke onderwerpen ingeleid. Dikwijls geeft een geboorte- of sterfdatum aanleiding tot de herdenking van een bepaalde historische figuur (Boerhaave, Dodonaeus, Vesalius, Jenner, Paracelsus, van Helmont, Newton, Coppernicus). Soms wordt samenwerking gezocht met andere organisaties, b.v. met de Nederlandsche Natuurkundige Vereeniging. Veelal is aan een vergadering een tentoonstelling verbonden van oude instrumenten, boeken, praeparaten, penningen, e.d., soms ook een bezoek aan een museum of een ontvangst ten stadhuize.

---

[1] Overzicht van de eerste 25 jaren (1913—1938) van het Genootschap voor Geschiedenis der Genees-, Natuur- en Wiskunde, samengesteld door Dr. D. Burger. Drukkerij Jacob van Campen, Amsterdam, 1938. Niet in den handel, maar voor belangstellenden bij den secretaris bovengenoemd verkrijgbaar.

Het Genootschap bezit geen eigen orgaan. De verhandelingen op medisch gebied worden opgenomen in het Nederlandsch Tijdschrift voor Geneeskunde en daarna afzonderlijk uitgegeven onder den naam „Bijdragen tot de Geschiedenis der Geneeskunde"; deze uitgave bevat ook de ledenlijst en korte verslagen der vergaderingen. Sedert 1940 is er voor de niet-medische bijdragen een soortgelijke regeling getroffen met „de Natuur, populair geïllustreerd maandblad, gewijd aan de natuurwetenschappen en hare toepassingen", zooals de secretaris in het herdenkingsnummer bij het begin van den zestigsten jaargang kon mededeelen [1]). Met de Natuur bestond nog een andere band: de leden van het Genootschap konden zich tegen sterk verlaagden prijs op dit tijdschrift abonneeren. Helaas hebben de oorlogsomstandigheden niet lang daarna de uitgave verhinderd en tot dusver is het maandschrift niet weer verschenen.

Op de voorjaarsvergadering van 1928 werd besloten tot oprichting van het Instituut voor de Geschiedenis der Genees-, Natuur- en Wiskunde. Het Instituut beheert een bibliotheek, in hoofdzaak van medisch-historische werken, die tot dusver gehuisvest was in de Kliniek voor Oogheelkunde in het Academisch Ziekenhuis te Leiden; waarschijnlijk zal ze binnenkort worden verplaatst.

In samenwerking met andere organisaties stichtte het Genootschap in 1942 het Penningkabinet „Scientia Medica et Naturalis in nummis", een verzameling van gedenkpenningen op het gebied der natuur- en geneeskundige wetenschappen. Deze verzameling bevat ook, in bruikleen, de fraaie collectie die door Dr. J. H. O. Reijs is bijeengebracht.

Vermelden we ten slotte nog dat in 1940 een nieuw artikel in het Huishoudelijk Reglement is opgenomen, waarbij een bronzen eerepenning is ingesteld, die kan worden toegekend „aan personen of instellingen, die zich bijzonder verdienstelijk hebben gemaakt ten opzichte van de geschiedenis der in art. 1 genoemde wetenschappen, ten opzichte van het Genootschap of jegens het Instituut voor geschiedenis der Geneeskunde, Wiskunde en Natuurwetenschappen". Onlangs heeft deze toekenning voor de derde maal plaats gehad en wel aan den bekenden historicus Dr. F. M. G. de Feyfer.

Met het voorgaande zijn zeker nog niet alle werkzaamheden van het Genootschap opgesomd; wie de geschiedenis van het Genoot-

---

[1]) Dr. D. Burger. De beoefening van de geschiedenis der wetenschappen. De Natuur **60**, 1940, bl. 11.

schap doorleest, ervaart steeds weer hoe het ook op andere wijze zijn moreelen en finantieelen steun heeft verleend als het erom ging den bloei der historische studiën te bevorderen, zoo ook b.v. door het uitschrijven van prijsvragen.

Men kan van het Genootschap slechts lid worden na als zoodanig te zijn voorgedragen, waarna de Algemeene Vergadering over de toelating beslist. De ondervinding leert echter dat zonder gewichtige redenen werkelijk belangstellenden niet uit den kring der leden worden geweerd, maar integendeel zeer welkom zijn. Ook kan men begunstiger worden; begunstigers betalen dezelfde contributie als de leden en hebben dezelfde rechten, met uitzondering van het stemrecht. In de vergaderingen heerscht een aangename toon en men doet steeds weer de ervaring op, dat niettegenstaande de steeds voortschrijdende specialisatie der tegenwoordige wetenschap men op dit bepaalde gebied steeds elkanders voordrachten kan volgen.

Utrecht, Febr. 1946. D. J. E. SCHREK.
